AG3
P. 34

Geschenk vom Hr Hofr. Dr Daumiller

1850.

P 32

Lehrbuch

der

niedern Arithmetik

verfaßt

von

Gottfried Christian Vogel,

Oberlieutenant à la Suite, und Professor der Mathematik am königl. bayerl. Cadettencorps.

München,

zu haben, bei dem Verfasser,

und gedruckt bei G. A. W. Spindler in Kulmbach.

1829.

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Vorrede.

Dieses Lehrbuch, welches ich zu meinem eigenen Gebrauche und nach dem Lehr-Plane für das Königliche Kadetten-Korps bearbeitete, ließ ich vorzüglich für die Zöglinge und Adspiranten desselben drucken, um den Ersteren, nemlich den bereits im Korps befindlichen Zöglingen das Schreiben der Lehrsätze und Regeln zu ersparen, den Letzteren oder Adspiranten hingegen über dasjenige die nöthige Anleitung zu geben, was und nach welcher Methode diese die Arithmetik zu erlernen haben, wenn sie der allerhöchsten Anforderung hinsichtlich der zur Aufnahme bis in die 4te Klasse nöthigen Kenntnisse entsprechen wollen.

Wer nemlich in irgend eine Klasse des Königlichen Kadetten-Korps aufgenommen zu werden sucht, muß alles, was in den vorhergehenden niederern Klassen gelehrt wird, wohl innen haben.

Den Zöglingen der untersten oder 1ten Klasse, welche nach der Aufnahms-Bedingniß bereits Fertigkeit im Numeriren und den Rechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen besitzen, wird nun der Inhalt dieses Lehrbuches bis Seite 83 vorgetragen und eingeübt, wobei die wichtige Lehre der Rechnungsarten mit Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten nach §. 15, 6tens und 7tens, dann §. 16, 10tens und 11tens durch anschauliche Beispiele praktisch erläutert wird.

In der 2ten Klasse erstreckt sich der Lehr-Vortrag von Seite 84 bis 128, und von 133 bis 166, während die auf Seite 129 bis 133 behandelte Lehre der Rechnungsarten mit Wurzelgrößen hier wegbleibt, indeß wird solche dadurch ersetzt, daß die Wurzelgrößen auf den Ausdruck von Potenzen gebracht, und je-

ne Potenzen mit gebrochenen Exponenten, welche das Resultat wieder giebt, in Wurzelgrößen ausgedrückt werden.

Der 3ten Klasse werden die Lehren von Seite 167 bis 250, und von 255 bis 270 vorgetragen und eingeübt, so wie der Gebrauch der briggischen Logarithmen-Tafeln, vorzüglich der von Vega gelehrt. Dieser Vega'schen Logarithmen-Tafel, welche in der Weidmannl. Buchhandlung zu Leipzig verlegt, ist deren Gebrauch vorgedruckt, daher derselbe in diesem Lehrbuche weggelassen.

Die in gegenwärtigem Lehrbuch mit * bezeichneten Abschnitte und §. §. werden in den höheren Klassen des Korps docirt.

Obgleich der Grund des Verfahrens bei allen Rechnungsfällen sehr oft und der Fassungsgabe der Zöglinge entsprechend vorgetragen und erklärt wird, so wird doch nicht verlangt, daß die Zöglinge der 1ten und 2ten Klasse selbst immer den Grund genau anzugeben wissen. Von der 3ten Klasse wird solches jedoch

gefordert, was hier dem gewöhnlichen Alter der Zöglinge dieser Klasse auch angemessen ist.

Die Buchstabenrechnung habe ich deshalb ebenso, wie die Zifferrechnung eingetheilt, damit auch hiernach beyde zugleich vorgetragen werden können.

Die in mehreren Exemplaren vorkommenden Druckfehler sind vor dem Anhange bemerkt.

München, im Monat März 1829.

Der Verfasser.

Inhalt.

		Seite
I.	Einleitung	1
II.	Von den vier Rechnungsarten	
1)	Von Zahlensystemen und deren Bezeichnungsart	6
2)	Von dem Numeriren	11
3)	Von den vier Rechnungsarten im Allgemeinen	13
4)	Von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen	22
5)	Von der Multiplication und Division ganzer Zahlen	30
6)	Von der Theilbarkeit der Zahlen	49
7)	Von den Brüchen oder gebrochenen Zahlen	56
8)	Von den vier Rechnungsarten benannter Zahlen	69
9)	Von den Dezimalbrüchen	76
10)	Von der Buchstabenrechnung	84
	A) Einleitung	84
	B) Von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen und Größen	87
	C) Von der Multiplication und Division ganzer Zahlen und Größen	93
	D) Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen und Größen	102
	E) Von den gebrochenen Zahlen und Größen	105
III.	Von der Erzeugung der Potenzen, Ausziehung der Wurzeln, und den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln	
1)	Von der Erzeugung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln im Allgemeinen	113
2)	Von den Rechnungsarten mit Potenzen	122
3)	Von den Rechnungsarten mit Wurzelgrößen	129
4)	Von dem Quadrate und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen	133
5)	Vom Cubus und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen	145
6)	Vom Biquadrate und der Biquadratwurzel vieltheiliger Größen	160
7)	Von der fünften Potenz und der fünften Wurzel vieltheiliger Größen	163
8)	Von der sechsten Potenz und der sechsten Wurzel vieltheiliger Größen	166

Inhalt.

Seite

IV. Von der Algebra
1) Von den Gleichungen im Allgemeinen . . 167
2) Von der Bildung der Gleichungen aus den algebraischen Aufgaben 171
3) Von Auffindung der Werthe unbekannter Größen in einfachen Gleichungen 178
A) Bei einer bestimmten Gleichung . . 178
B) Bei mehreren durch einander bestimmten Gleichungen 183
C) Bei unbestimmten Gleichungen . . 188
4) Von Auffindung der Werthe unbekannter Größen in höheren reinen Gleichungen 192
5) Von Auffindung des Werthes unbekannter Größen in gemischten quadratischen Gleichungen . . 195

V. Von den Proportionen.
1) Von den Proportionen im Allgemeinen . . 200
2) Von den arithmetischen Proportionen . . 202
3) Von den geometrischen Proportionen . . 205
4) Von der Anwendung der Proportionslehre . 211
a) einfache Regel-Detri 213
b) einfache Zinsrechnung bei einem Kapitale . 219
c) einfache Zinsrechnung bei zwei Kapitalien . 220 234
d) einfache Gesellschaftsrechnung und Vermischungsregel 222
e) Alligationsregel 224
f) Regula falsi 226
g) zusammengesetzte Regel-Detri . . . 228
h) Reesische-, oder Ketten-Regel . . . 229
i) zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung . . 230

VI. Von den Reihen oder Progressionen.
1) Von den Progressionen im Allgemeinen . . 236
2) Von den arithmetischen Progressionen . . 237
3) Von den geometrischen Progressionen . . 241
*4) Von der Anwendung der Progressionslehre auf die Interusurienrechnung 250

VII. Von den Logarithmen.
1) Von den Logarithmen im Allgemeinen . . 255
2) Von den briggischen und natürlichen Logarithmen 258
3) Von der Anwendung der Logarithmen auf die Zifferrechnung 263

*VIII. Von den continuirlichen oder Kettenbrüchen.
1) Von den continuirlichen Brüchen im Allgemeinen . 271
2) Von den continuirlichen Brüchen, deren Zähler = 1 sind 278
3) Von der Anwendung der continuirlichen Brüche . 290

Anhang über verschiedene Maaße, Gewichte, Münzen und andern Reductionen. I
Fünf Tabellen XXIV

I.

Einleitung.

§. 1.

Die Arithmetik (von ἀριθμὸς, Zahl) ist die Wissenschaft von Zahlen und gezählten Größen und ein Theil der Mathematik.

Sie wird wieder eingetheilt:

1tens, in die Elementar- oder niedere Arithmetik, und wozu

a) die Ziffer- oder Zahlenrechnung,

b) die allgemeine Größen- oder Buchstabenrechnung, und

c) andere leichtfaßliche Rechnungslehren gehören.

2tens, in die höhere Arithmetik, welche die schwereren Sätze und Aufgaben entwickelt und wozu

a) die Lehre der höheren Gleichungen,

b) die Lehre der analytischen Funktionen, und

c) die Infinitesimalrechnung

gehöret.

§. 2.

Erklärungen:

1tens, Das, was ein niedergeschriebener Satz enthält und man daher oder ihn schreibt, heißt dessen Titel, daher, weil dieser § Erklärungen enthält, solches oben an geschrieben ist.

2tens, Die Titel, unter welchen man die Lehren der Arithmetik vorträgt, heißen

Erklärung (Definitio),
Grundsatz (Axioma),
Lehrsatz (Theorema),
Heischesatz (Postulatum),
Aufgabe (Problema),
Zusatz (Corollarium),
Anmerkung (Scholion),
Lehnsatz (Lemma).

3tens, Eine Erklärung (Definitio) ist die genaue und deutliche Darstellung eines Begriffes. Sie ist entweder

a) Worterklärung (Def. nominalis), oder
b) Sacherklärung (Def. realis, genetica).

Erstere giebt die Merkmahle des Begriffes an, ohne die Möglichkeit desselben zu zeigen, welches durch die letztere geschiehet.

4tens, Ein Satz, der angiebt, daß Etwas so oder nicht so ist, heißt ein theoretischer Satz (Propositio theoretica) und zwar

a) wenn dessen Wahrheit, sobald man den Sinn der Worte aufgefaßt hat, sogleich einleuchtet, ein Grundsatz, und
b) wenn dessen Wahrheit erst aus Grund- oder anderen bereits als wahr erkannten Sätzen abgeleitet, d. i. durch sie erst erwiesen werden muß, ein Lehrsatz.

5tens, Ein Satz, der angiebt, daß Etwas geschehen soll, ist ein praktischer Satz, (Propositio practica), und zwar:

a) wenn es sogleich einleuchtet, daß man dem Verlangen Genüge leisten kann, eine Forderung oder ein Heischesatz, und

b) wenn erst zu wissen nöthig ist, auf welche Art man das Verlangte erfüllen kann, und daß dieses dadurch erfüllet ist, erst erwiesen werden muß, eine Aufgabe.

Die Art, wie man eine Aufgabe erfüllet, nennt man ihre Auflösung (Solutio).

6tens, Ein Beweis ist die Darstellung der Wahrheit eines Satzes aus anderen bereits erkannten Wahrheiten; er heißt

a) direkt, wenn er die Wahrheit desselben geradezu darstellet,

b) indirekt, apagogisch, wenn er dieselbe dadurch darstellet, daß er zeigt, daß ein anderer Fall nicht möglich ist,

c) synthetisch, wenn er von den Gründen zur Conclusion führt, und

d) analytisch, wenn er von der Conclusion zu den Gründen zurückführt.

7tens, Ein Zusatz ist der Satz, der aus dem Vorhergegangenen sich leicht und unmittelbar folgern läßt.

8tens, Eine Anmerkung ist das, was man, ohne daß es einen Theil der Wissenschaft ausmachet, beisetzet.

9tens, Ein Lehnsatz ist das, was man aus anderen Wissenschaften oder einem andern Theile derselben Wissenschaft, einschaltet.

§. 3.

Erklärungen:

1tens, Gleichartig nennt man Dinge, insoferne sie in irgend einer Beziehung betrachtet, einerlei Namen haben; ungleichartig aber, insoferne sie in irgend einer Beziehung betrachtet, verschiedene Namen haben; z. B. Aepfel und Birne, sowie auch Messer und Scheeren ha-

ben als solche verschiedene, hingegen erstere als Obststücke und letztere als schneidende Instrumente einerlei Namen, sie sind daher in ersterer Beziehung ungleichartig und in letzterer gleichartig.

2tens, Eine Größe (Quantum) nennt man jedes Ding, das aus gleichartigen Theilen besteht.

3tens, Größen nennt man discrete, insoferne sie sich unserem Auge als rein abgesondert darstellen; hingegen indiscrete oder stetige, insoferne dieses nicht der Fall ist, sondern die gleichartigen Theile mit andern fortwährend so zusammenhängen, daß das Aufhören des einen auch der Anfang des andern ist; z. B. ein Apfel ist als solcher eine discrete, hingegen als ein Theil des Raumes eine indiscrete Größe.

4tens, In Beziehung auf mehrere discrete Größen gleicher Art heißt jede einzelne das absolute Maaß (die absolute Einheit) derselben.

5tens, Unter Zählen versteht man dasjenige Verfahren, wodurch man sich einen deutlichen Begriff von einer Menge (Quantität) gleichartiger discreter Dinge verschafft. Eine solche bestimmte Menge heißt dann die Zahl oder Anzahl dieser Dinge.

6tens, Gleichartige Größen heißen gleich, wenn sie einerlei Quantität haben, außerdem aber ungleich.

§. 4.

Grundsätze:

1tens, Zu jeder Quantität kann man eine oder mehrere Einheiten oder Theile gleichartiger Art hinzuthun, oder auch von ihr hinwegnehmen und das, was im ersten Falle wird, so wie das, was im zweyten Falle bleibt, als ein Ganzes, d. i. als eine Quantität betrachten.

2tens, Eine Quantität kann man als solche vervielfachen, d. i. öfters nehmen, und sie sich in jede beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, vorstellen.

3tens, Von jeder indiscreten Größe kann man irgend einen

Theil als discret, daher als Einheit betrachten und ihre Quantität dadurch bestimmen, folglich auch indiscrete Dinge zählen.

4tens, Jede Größe ist sich selbst gleich.

5tens, Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich, hingegen größer als ein oder etliche Theile davon.

6tens, Gleiches auf gleiche Art verändert, giebt wieder Gleiches, hingegen Gleiches auf ungleiche Art oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, giebt Ungleiches.

7tens, Das, was zwey Größen mit einer dritten gemein haben, haben sie auch unter sich gemein.

8tens, Gleiche Größen lassen sich in dieser Rücksicht für einander setzen.

§. 5.

Erklärungen:

1tens, Größen können auch in Beziehung ihrer Quantitäten gegen einander betrachtet werden und man nennt dieses, sie in ihrem geometrischen Verhältnisse betrachten, und die Quantität, welche als Maaß (Einheit) einer andern genommen wird, nennt man in diesem Falle eine relative Einheit.

2tens, Unter Verhältniß ohne weiteren Beysatz wird immer ein geometrisches verstanden.

3tens, Da man nach §. 3, 5tens und §. 4, 3tens, sowohl discrete als indiscrete Größen zählen kann, so nennt man die Arithmetik auch allgemeine Größenlehre.

§. 6.

Erklärungen:

1tens, Das Gleichheitszeichen ist ($=$) und $a = b$ heißt daher, a ist gleich b.

2tens, Das Ungleichheitszeichen ist ($<$), dergestalt, daß die Spitze auf die kleinere und die Oeffnung auf die größere Größe hinweißt, daher $a < b$ heißt, a ist kleiner als b, und $a > b$ heißt, a ist größer als b.

II.

Von den vier Rechnungsarten.

Erster Abschnitt.

Von Zahlensystemen und deren Bezeichnungsart.

§. 7.

Erklärungen:

1tens, Um die Menge gezählter Größen kürzer zu schreiben, als durch Worte geschehen kann, bedienen wir uns der Zeichen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

welche arabische Ziffern, und insoferne dadurch eine Anzahl ausgedrückt wird, Zahlen heißen.

2tens, Das Ziffer 1 drückt eine Einheit, 2 drückt eine und noch eine Einheit, und ebenso drückt 3 wieder eine Einheit mehr, und sofort jedes der obigen Ziffern immer eine Einheit nach der Ordnung, wie sie stehen, mehr aus, bis auf das letzte Ziffer, welches den Mangel einer Einheit bezeichnet.

3tens, 1 wird durch eins, 2 durch zwey, 3 durch drey,
4 = = vier, 5 = fünf, 6 = sechs,
7 = = sieben, 8 = acht, 9 = neun,
und 0 = null ausgesprochen, und es heißen die ersten neun, zum Unterschied gegen 0, Zahlziffern.

4tens, Um die Anzahl noch mehrerer Einheiten einerlei Größen darzustellen, nimmt man die nemlichen Ziffern, und giebt ihnen dadurch, daß man sie neben einander schreibt, einen höheren Werth und nennt zum Unterschiede, den Werth, den das Ziffer (nach 2tens) an und für sich hat, seinen natürlichen Werth, hingegen den, den es durch seine

Stelle neben anderen Ziffern erhält, seinen Local=werth.

5tens, Da jede Quantität durch eine Zahl ausgedrückt, folglich auch jede Zahl als relative Einheit einer andern (nach §. 5, 1tens) betrachtet werden kann, so nennt man zur Bezeichnung dieses Unterschiedes, die Zahl 1 die absolute oder primitive Einheit (absolutes Maaß), hingegen jede andere Zahl, wenn sie als Einheit betrachtet wird, eine relative Einheit oder Einheit höherer Art.

6tens, Nimmt man eine, mehrere Einheiten höherer Art enthaltende Zahl zum Maaße, so nennet man diese Zahl eine zusammengesetzte Einheit, und die, aus welcher sie erzeugt ist, eine niedere Einheit; z. B. bei den Zahlen 1,2,4,8, ist 1 die absolute, 2 die niedere, und 4 die zusammengesetzte Einheit von 8.

7tens, Eine relative Einheit kann daher eine niedere oder zusammengesetzte Einheit seyn.

8tens, Zahlen, welche zusammengesetzte Einheiten ausdrücken, nennt man zusammengesetzte Zahlen, und die übrigen einfache oder Primzahlen; so sind z. B. von den Zahlen 1 bis 9, die Zahlen 4, 6, 8 und 9 zusammengesetzte, die übrigen aber Primzahlen.

9tens, Diejenigen Zahlen, welche eine relative Einheit zum gemeinschaftlichen Maaße haben, nennt man zusammengesetzte Zahlen unter sich, und diejenigen, die eine dergl. nicht haben, Primzahlen unter sich; so sind z. B. 6 und 9, da sie durch die relative Einheit 3 gemessen werden können, zusammengesetzte Zahlen unter sich, hingegen 7 und 9 Primzahlen unter sich.

10tens, Eine Zahl gegen eine andere betrachtet, nennet man, wenn diese andere eine relative oder absolute Einheit von ihr ist, eine ganze Zahl im strengeren Sinne, außerdem eine gebrochene Zahl im strengeren Sinne, und die andere oder das Maaß, im ersten Falle ein wirkliches, im zweiten ein angenommenes,

und es wird unter Maaß ohne weiteren Beisatz immer ein wirkliches verstanden. Z. B. alle Zahlen sind gegen 1, so wie alle zusammengesetzte gegen ihre niederen Einheiten, wie z. B. 8 und 4 gegen 2, dann 9 und 6 gegen 3, ganze, hingegen 1 gegen alle anderen Zahlen, die niederen Einheiten gegen die aus ihnen zusammengesetzten, und die Primzahlen unter sich gegen einander betrachtet, sind gebrochene Zahlen im strengern Sinne.

11tens, Enthält die relative Einheit, gegen welche eine Zahl eine gebrochene Zahl ist, weniger absolute Einheiten, so ist diese gebrochene Zahl, eine unächte, und enthält sie mehr dergleichen, so ist sie eine ächte gebrochene Zahl; z. B. 3 ist gegen 2 eine unächte, und 2 gegen 3 eine ächte gebrochene Zahl.

12tens, Wenn man sich die Einheit in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (nach §. 4, 2tens) getheilt, vorstellt, und die Anzahl dieser Theile durch Zahlen ausgedrückt werden soll, so wird unter die letztere ausdrückende Zahl die, erstere bezeichnende Zahl geschrieben, und dazwischen ein Strich gesetzet; z. B. $\frac{6}{7}$ zeigt an, daß 6 der in 7 gleiche Theile getheilten Einheit vorhanden sind, welches durch sechs Siebentel ausgesprochen wird; und wenn hiebei eine relative Einheit nicht ausdrücklich benannt ist, wird immer die absolute darunter verstanden.

13tens, Zahlen, welche nach 12tens) eine Anzahl gleicher Theile einer Zahl ausdrücken, heißen gebrochene Zahlen im weiteren Sinne, oder Brüche, und jede Zahl zum Unterschied gegen einen Bruch, eine ganze Zahl im weiteren Sinne; und es wird unter einer ganzen Zahl ohne weiteren Beisatz, immer eine dergleichen im weiteren Sinne verstanden.

§. 8.

Erklärungen:

1tens, Wenn die Größe bestimmt ist, deren Menge eine Zahl ausdrückt, so heißt diese (ganze oder gebrochene) Zahl

eine benannte, außerdem eine unbenannte Zahl;

2tens, Zahlen beziehen sich daher, wenn das Gegentheil nicht besonders ausgedrückt ist, immer auf Größen einerlei Art; es sind also Zahlen (nach §. 3, 6tens) gleich, wenn sie gleichviel absolute Einheiten ausdrücken, außerdem ungleich.

§. 9.

Erklärungen:

1tens, Neun und noch eine Einheit heißen Zehn Einheiten,

Zehn	=	=	=	=	=	Eilf	=
=	=	=	2	Einheiten	=	Zwölf	=
=	=	=	3	=	=	Dreizehn	=
=	=	=	4	=	=	Vierzehn	=
=	=	=	5	=	=	Funfzehn	=
=	=	=	6	=	=	Sechszehn	=
=	=	=	7	=	=	Siebenzehn	=
=	=	=	8	=	=	Achtzehn	=
=	=	=	9	=	=	Neunzehn	=

Zehn Einheiten oder Einer nimmt man für eine Einheit höherer Art und nennt sie einen Zehner; Zehn und noch zehn Einer machen also 2 Zehner oder Zwanzig Einer, Zwanzig und zehn Einer machen 3 Zehner oder Dreißig Einer, und so entstehen weiters

4	Zehner	oder	Vierzig Einer
5	=	=	Funfzig =
6	=	=	Sechszig =
7	=	=	Siebenzig =
8	=	=	Achtzig =
9	=	=	Neunzig =

Zehn Zehner machen wieder eine Einheit höherer Art, welche Hunderter heißt, und ebenso machen

zehn	Hunderter		einen Tausender,
=	Tausender	=	Zehntausender,
=	Zehntausender	=	Hunderttausender,
=	Hunderttausender	eine	Million,

und jetzt kommen auf die nemliche Art Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender und Hunderttausender von Millionen. Zehn Hunderttausend Millionen machen eine Billion, dann kommen eben so wieder Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende und Hunderttausende von Billionen; Zehn Hunderttausend Billionen machen eine Trillion, u. s. w. entstehen Viellionen. Tausend Millionen nennt man auch eine Milliarde.

2tens, Um nun diese angegebenen höheren Einheiten durch dieselben Ziffern (§. 7, 1tens) darzustellen, giebt man jedem Ziffer, indem man sie neben einander schreibt, von der rechten zur linken Hand, einen zehnmal größeren Werth, und drückt daher

zehn Einheiten durch 10,
eilf = = 11,
zwölf = = 12,
hundert = = 100
u. s. w.

aus.

3tens, Das System, gleichartige Größen oder Theile zu zählen, und durch Zahlen auszudrücken, nennt man ein Zahlensystem, und dieses, wo immer zehn Einheiten einer Ordnung zu einer Einheit der nachfolgenden höheren Ordnung gehören, das decadische oder Dezimalsystem.

Anmerkung.

1tens, Daß es mehrere Zahlensysteme geben kann, leuchtet hierdurch ein; das decadische aber ist wegen der Anschaulichkeit desselben vermöge der Finger, das bei allen gebildeten Nationen gebräuchliche Zahlensystem.

2tens, Durch die vorstehende Bezeichnungsart ist auch die größte Sparsamkeit in Beziehung der hiezu nöthigen Zeichen gebraucht, wie aus der Lehre der Variationen hervorgeht.

4tens, Die Arithmetik lehret uns nun, aus bekannten Zahlen und der Art, wie unbekannte davon abhängen, letztere

auf die einfachste Weise finden, und man nennt diese Weise das Rechnen und daher die Arithmetik die Rechenkunst.

5tens, Da man nun jede Größe oder Zahl durch ein allgemeines Zeichen, z. B. durch einen Buchstaben bezeichnen und dann mit ihnen rechnen kann, so heißt die Rechnung mit blosen Zahlen, die Ziffer- oder Zahlenrechnung, und die mit Buchstaben die allgemeine Größen- oder Buchstaben-Rechnung.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Numeriren.

§. 10.

Erklärungen:

1tens, Eine Reihe von Ziffern als eine Zahl aussprechen oder eine gegebene Anzahl von Einheiten durch eine Zahl schreiben, heißt numeriren.

2tens, Da man jederzeit unter den Werth, den Zahlen ausdrücken, Einheiten versteht, so wird der Ausdruck »Einheiten« weggelassen, also z. B. 26 nur durch sechs und zwanzig ausgesprochen; so wie die Nullen, welche den Mangel der Einheiten irgend einer Ordnung bezeichnen, nicht ausgesprochen werden, und daher z. B. 204 durch zwei hundert und vier gelesen wird.

§. 11.

Aufgabe:

Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl auszusprechen oder zu lesen, z. B. die Zahl 342067804325798470 81.

Auflösung:

1tens, Man theile die gegebene Zahl von der rechten zur linken Hand in Classen zu 6 Ziffern, setze am Ende der

ersten Classe das Zeichen (′), am Ende der zweiten das Zeichen (″), am Ende der dritten das Zeichen (‴), u. s. w.

2tens, Jede Classe halbiere man durch das Zeichen (,) und lese nun, indem man (nach §. 10, 2tens) immer drei Ziffern auf einmal, dann das Zeichen (,) mit Tausend, und die Zeichen (‴), (″), (′) mit Trillion, Billion, Million ausspricht, von der linken zur rechten Hand, und lasse die Classen, welche lauter Nullen enthalten, weg, lese aber, wenn auch nur ein Zahlziffer in einer Classe enthalten ist, dieses nebst den nachfolgenden Zeichen dieser Classe.

3tens, Die gegebene Zahl

34‴206,780″432,579′847,081

heißt also »Vier und dreißig Trillionen, zwei hundert und sechs Tausend, sieben hundert achtzig Billionen, vier hundert zwei und dreißig Tausend, fünf hundert neun und siebenzig Millionen, acht hundert sieben und vierzig Tausend, ein und achtzig«; und die Zahl

601,000′030,000

heißt also »Sechs hundert und ein Tausend Millionen und dreißig Tausend.

Beweis:

Die Richtigkeit der Auflösung folgt aus §. 9, 1tens und 2tens.

§. 12.

Aufgabe:

Eine gegebene Zahl durch Ziffern auszudrücken, z. B. Ein hundert und vier Tausend, zwei hundert neunzig Billionen, funfzig Tausend sechs Millionen, ein hundert und acht.

Auflösung:

Man schreibe solche nach der im §. 9, 1tens und 2tens, angegebenen Reihefolge von der linken zur rechten Hand, daß jedes Ziffer seinen haben sollenden Werth erhält, d. i. man schreibe immer die Ziffern, welche Tausende sind, so

wie die 3 Ziffern der nachfolgenden niederen Ordnungen auf einmal nieder, bezeichne die Tausende mit (,) und die Millionen ꝛc. mit (′), ꝛc. und fülle diejenigen Stellen, für welche kein Ausdruck in der ausgesprochenen Zahl liegt, mit Nullen aus; es ist daher obige Zahl durch

104,290″050,006′000,108

zu schreiben.

Zusatz:

Diese für die Ausdrücke »Tausend, Million, ꝛc.« angegebenen Zeichen dienen blos zur Erleichterung des Lesens der Zahlen, sind aber zur Bestimmung des Werths einer Zahl nach §. 9, 1^{tens} und 2^{tens}, nicht nöthig.

Dritter Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten im Allgemeinen.

§. 13.

Erklärungen:

1^{tens}, Zu einer oder mehreren Größen eine oder mehrere andere hinzuthun (§. 4, 1^{tens}), und dann ihr Ganzes ausdrücken, heißt addiren, die einzelnen Quantitäten heißen die Posten oder Summanden, und das Ganze die Summe; das Zeichen der Addition ist (+), und es heißt a + b, zu a solle b addirt werden; dieses Zeichen (+) wird auch mit plus oder und ausgesprochen.

2^{tens}, Von einer Quantität eine andere hinwegnehmen oder abziehen, und das was bleibt, d. i. ihr sodanniges Ganze bestimmen, heißt subtrahiren; die Quantität, die hinweggenommen wird, heißt der Subtrahend, von der solche abgezogen wird, der Minuend, und das bleibende Ganze der Rest.

Das Zeichen der Subtraction ist (—) und es heißt a — b, von a solle b abgezogen werden. Dieses Zei-

chen (—) wird auch mit minus oder weniger ausgesprochen.

3tens, Eine Quantität öfters nehmen (§. 4, 2tens), und ihr sodanniges Ganze bestimmen, heißt sie multipliciren, und die Quantität der Multiplicand; die Zahl, die angiebt, wie oft die Quantität, d. i. wie viel mal sie genommen werden soll, heißt der Multiplicator und ihr sodanniges Ganze das Produkt. Das Zeichen der Multiplication ist (.) oder (×), und es heißt also a.b oder a×b, es solle a, b mal genommen werden; dieses Zeichen (.) oder (×) wird daher auch mit mal ausgesprochen.

4tens, Jeden beliebigen Theil einer Quantität bestimmen, heißt sie dividiren; die Quantität, die getheilt werden soll, heißt der Dividend; die Zahl, welche angiebt, der wie vielte Theil des Dividends bestimmt werden solle, heißt der Divisor; und die Quantität, welche den verlangten Theil des Dividends angiebt, heißt der Quotient. Das Zeichen der Division ist (:) und es heißt a : b, es solle a durch b dividirt werden; dieses Zeichen (:) wird daher mit dividirt durch ausgesprochen.

5tens, Diese unter 1tens bis 4tens angegebenen 4erlei Bestimmungen, heißen die 4 Rechnungsarten.

Anmerkung.

Bei Rechnungen vermeide man als Anhaltszeichen ꝛc. den Doppelpunkt, den Punkt, den Gedankenstrich und das Comma, weil der erste das Divisionszeichen, der zweite das Multiplicationszeichen, der dritte das Subtractionszeichen, und das letzte bei Dezimalbrüchen das Unterscheidungszeichen der Ganzen und der Dezimalen ist, auch bei nachfolgenden 3 Ziffern den Ausdruck »Tausend« bedeuten kann; man nehme daher statt solche den Strichpunkt (;), wenn außerdem Undeutlichkeit dadurch entstünde.

§. 14.

Zusaetze:

1tens, Sind die Größen, mit denen eine der im vorigen §. angegebenen Veränderungen vorgenommen werden soll, zwar einerlei Art, aber nicht bestimmt, so beziehen sich die vier Rechnungsarten (nach §. 8, 2tens) auf Zahlen, und sind die Größen bestimmt, so beziehen sie sich (nach §. 8, 1tens) auf benannte Zahlen.

2tens, Wird eine Größe oder Zahl (§. 9, 5tens) durch einen Buchstaben, also allgemein ausgedrückt, so sind die 4 Rechnungsarten, Buchstabenrechnung.

3tens, Die 4 Rechnungsarten werden in der Zifferrechnung in die mit ganzen und in die mit gebrochenen Zahlen (nach §. 7, 13tens) eingetheilt, und in der Buchstabenrechnung in die mit ganzen und die mit gebrochenen Zahlen und Größen.

§. 15.

Zusaetze zur Addition und Subtraction:

1tens, Wenn von einer Summe ein Summand wieder weggenommen, d. i. abgezogen wird, so bleibt der andere, und wenn deren mehr wie zwey waren, die Summe der anderen zum Reste; und ziehet man alle Summanden nach beliebiger Ordnung von der Summe ab, so bleibt Nichts oder Null.

2tens, Wenn zu einem Reste der Subtrahend wieder addirt wird, so giebt die Summe den Minuenden, und es ist also der Minuend um so viele Einheiten größer, als es der Rest angiebt, daher der Rest der Unterschied (Differenz) zwischen dem Minuend und dem Subtrahend ist.

3tens, Addition und Subtraction dienen (nach 1tens und 2tens) einander zur Probe, d. i. sie beweisen gegenseitig, daß das Verlangte richtig vollzogen ist, denn wenn man zu einer Quantität eine andere addirt und nachher wieder abzieht, oder umgekehrt, so muß solche nicht verändert worden seyn.

4tens, Nach §. 4, 6tens, giebt Gleiches zu Gleichem addirt, wieder Gleiches, und zu Größerem das Gleiche, wie zu dem Kleineren addirt, giebt Größeres, und ebenso umgekehrt. Zu Größerem Größeres addirt, giebt umsomehr Größeres, als wenn man zu Kleinerem Kleineres addirt, und ebenso umgekehrt.

5tens, Gleiches von Gleichem abgezogen, giebt Gleiches. Von Größerem Gleiches wie von dem Kleineren abgezogen, giebt Größeres; hingegen von Gleichem Größeres abgezogen, giebt Kleineres, und von Größerem Kleineres abgezogen, giebt umsomehr Größeres.

6tens, Nach §. 4, 5tens, ist die Summe ihren Summanden gleich, und

a) es ist daher einerlei, ob man die Summe auf einmal oder ihre Summanden nach und nach in beliebiger Ordnung zu einer Quantität addirt, oder ebenso davon subtrahirt.

b) Um soviel man einen Summanden durch Addition vermehrt, oder durch Subtraction vermindert, umsoviel wird dadurch die Summe vermehrt oder vermindert.

c) Um soviel mal man alle Summanden durch Multiplication vergrößert, oder durch Division verkleinert, umsoviel mal wird dadurch die Summe vergrößert oder verkleinert.

d) Eine Quantität wird durch eine Summe durch Multiplication vergrößert, wenn man sie durch die einzelnen Summanden vergrößert, und diese einzelnen Produkte addirt.

e) Wenn man zu dem einen Summanden addirt, was man von einem andern abzieht, so wird dadurch die Summe nicht verändert.

7tens, Der Rest oder die Differenz ist dem Minuenden weniger dem Subtrahenden gleich, daher

a) der Rest wird zu einer Quantität addirt, wenn man ihr den Minuend addirt und den Subtrahend vor- oder nachher von ihr abzieht;

b) zu dem Reste wird eine Quantität addirt, wenn man sie entweder dem Minuend addirt, oder von dem Subtrahend abzieht;

c) der Rest wird von einer Quantität abgezogen, wenn man den Minuend von ihr abzieht, und den Subtrahend vor- oder nachher ihr addirt;

d) von dem Reste wird eine Quantität abgezogen, wenn man sie entweder von dem Minuenden abzieht, oder sie dem Subtrahenden addirt;

e) der Rest wird durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man sowohl den Minuend, als den Subtrahend dadurch multiplicirt oder dividirt;

f) eine Quantität wird durch einen Rest multiplicirt, wenn man sie sowohl durch den Minuend, als durch den Subtrahend multiplicirt, und das letzte Produkt von ersterem abzieht;

g) der Rest wird nicht verändert, wenn man den Minuend und Subtrahend zugleich durch Addition vermehrt oder durch Subtraction vermindert.

8^{tens}, Zahlen in Beziehung ihrer Differenz betrachten, nennt man, sie in ihrem arithmetischen Verhältnisse betrachten. (§. 5, 1^{tens} und 2^{tens}).

§. 16.

Zusaetze zur Multiplication und Division.

1^{tens}, Eine Quantität öfters nehmen, heißt die Anzahl der Größe so oft nehmen, als es die Zahl des Multiplicators angiebt, und diesem Produkte die nemliche Benennung geben. Da es nun einerlei ist, ob man z. B. 3 viermal oder 4 dreimal nimmt, denn $3.4 = 3.(3+1) = 9+3 = (3+1).3$, (nach §. 15, 6^{tens}, c und d), und so bei jeden anderen Zahlen, so ist es auch einerlei, wenn man die Zahlen des Multiplicands und Multiplicators als solche verwechselt; man giebt daher auch bei unbenannten Zahlen beyden einerlei Namen »Factor.«

2tens, Ein Factor ist daher so oft im Produkte enthalten, d. i. er ist der sovielte Theil vom Produkte, als es der andere Factor angiebt; dividirt man daher das Produkt durch einen Factor, so erhält man den andern zum Quotienten, und folglich erhält man aus dem Produkte und dem Multiplicand den Multiplicator, wenn man die Zahl des Produktes durch die Zahl des Multiplicands dividirt.

3tens, Der Quotient ist so oft im Dividenden enthalten, oder der sovielte Theil davon, als es der Divisor angiebt; man erhält daher den Dividenden zum Produkte, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, d. i. der Quotient ist der Factor, der mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden zum Produkte giebt, und folglich giebt die Zahl des Dividenden dividirt durch die Zahl des Quotienten, den vorigen Divisor zum Quotienten.

4tens, Wenn man daher von einer Quantität angeben soll, welches Vielfache sie von einer andern gleicher Art ist, oder wenn man bestimmen soll, wie oft diese andere in ihr enthalten ist, d. i. welcher Theil sie von ihr ist, so darf man nur (nach 3tens und 4tens) die Zahl der erstern durch die Zahl dieser andern dividiren, wo dann der Quotient die verlangte Zahl angiebt.

5tens, Größen gleicher Art in ihrem geometrischen Verhältnisse betrachten (§. 5, 1tens), ist daher ebensoviel, als sie nach dem Quotienten ihrer Zahlen betrachten.

6tens, Multiplication und Division dienen (nach 2tens u. 3tens) einander zur Probe.

7tens, Jede Größe durch dieselbe Zahl multiplicirt und vor- oder nachher dividirt, wird dadurch nicht verändert.

8tens, Größen kann man nicht durch Größen multipliciren oder dividiren.

9tens, Nach §. 4, 6tens, giebt Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder dividirt, wieder Gleiches. Gleiches durch Größeres multiplicirt, oder umgekehrt, giebt Größeres. Grö-

ßeres mit Größerem multiplicirt, giebt umsomehr Größeres. Gleiches durch Größeres dividirt, giebt Kleineres, und das Kleinere durch Größeres dividirt, umsomehr Kleineres, das Größere aber durch Gleiches, wie das Kleinere dividirt, giebt Größeres.

10tens, Das Produkt ist einem Factor mal den andern Factor gleich, daher

a) ein Produkt wird durch eine Zahl multiplicirt, wenn man nur einen Factor damit multiplicirt, und den andern als solchen beisetzet, denn z. B. 4 mal 3, noch 2 mal nehmen, heißt 4, 3 mal 2 mal, d. i. 6 mal nehmen.

b) Ebenso umgekehrt wird eine Quantität durch ein Produkt multiplicirt, wenn man sie nur mit einem Factor multiplicirt und den andern diesem Produkte als Factor beisetzet, d. i. wenn man sie mit beyden nach beliebiger Ordnung nach einander multiplicirt; denn z. B. 4, 6 mal 2 mal nehmen, heißt das 6 oder 2 mal genommene 4, noch 2 oder 6 mahl nehmen.

c) Ein Produkt wird dividirt, wenn man nur einen Factor dividirt und den andern als solchen unverändert läßt, denn dadurch wird offenbar das ganze Produkt umsoviel mal kleiner, als es der Divisor angiebt.

d) Eine Quantität wird durch ein Produkt dividirt, wenn man sie nur mit einem Factor dividirt, und diesem Quotienten den andern Factor als Divisor beisetzet, d. i. wenn man sie nach beliebiger Ordnung mit beyden Factoren nach und nach dividirt, denn z. B. 12 durch 3 mal 4 verkleinern, heißt das um 3 oder 4 mal verkleinerte 12 noch um 4 oder 3 mal kleiner nehmen.

e) Ein Produkt wird nach 5tens, nicht verändert, wenn man mit der nemlichen Zahl einen Factor desselben multiplicirt und einen andern davon dividirt.

11tens, Der Quotient ist dem Dividenden getheilt durch den Divisor gleich, daher

a) ein Quotient wird multiplicirt, wenn man entweder den Dividend damit multiplicirt, oder den Divisor dadurch dividirt, denn es ist für einen gewissen Theil, d. i. für den Quotienten einerlei, ob man das Ganze vergrößert und die Anzahl der Theile davon läßt, oder ob man das Ganze läßt, und die Anzahl der Theile verkleinert.

b) Ein Quotient wird aus demselben Grunde dividirt, wenn man entweder den Dividend dadurch dividirt, oder wenn man den Divisor dadurch multiplicirt.

c) Eine Quantität wird durch einen Quotienten multiplicirt, wenn man sie mit dem Dividend multiplicirt und mit dem Divisor vor- oder nachher dividirt; und

d) eine Quantität wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man sie mit dessen Dividend dividirt, und mit dessen Divisor vor- oder nachher multiplicirt, denn in beyden Fällen muß man das, was man durch den Dividend zuvielmal gethan hat, durch den Divisor wieder wenigermal nehmen.

e) Ein Quotient wird nicht verändert, wenn man Dividend und Divisor mit einerlei Zahl zugleich multiplicirt oder dividirt.

12tens, Eine Quantität durch eine Summe, oder Differenz zu dividiren, heißt (nach 3tens) einen Quotienten zu finden, der als Factor mit derselben multiplicirt, die Quantität zum Produkte giebt.

§. 17.

Erklaerung:

Um anzudeuten, daß man eine der durch die 4 Rechnungsarten möglichen Veränderungen einer Zahl oder Größe als geschehen betrachtet, setzt man die Größen oder Zahlen

mit den vorgeschriebenen Zeichen zusammen, und schließt sie in Klammern ein, welche anzeigen, daß sie als ein Ganzes zu betrachten sind; es ist daher z. B.

(a + b) als eine Summe,
(a — b) als ein Rest oder eine Differenz,
(a . b) oder (a × b) als ein Produkt, und
(a : b) als ein Quotient

zu betrachten.

Anmerkung.

Es ist meistens Vortheil, wenn man bei mehreren mit Zahlen oder Größen nach und nach vorzunehmenden Veränderungen, diese anfänglich nach oben blos andeutet, weil sich viele dieser Veränderungen öfters durch die in dem §. 15 und §. 16. gegebenen Lehren, welche in der Buchstabenrechnung §. 79. durch allgemeine Beispiele und in den §. §. 22, 24, 30 u. 34 durch besondere dergleichen erläutert sind, ganz oder zum Theil durch später nöthige Veränderungen heben, und sich daher schneller das wünschende Resultat dadurch finden läßt. So z. B. wenn die Zahl 4, 6mal genommen, dann durch 3 dividirt werden soll, hat man blos nöthig, diese Zahl 4, 2mal zu nehmen, denn nach §. 16, 10tens, c, ist (4.6):3 = 4.2.

§. 18.

Grundsatz:

Wenn man von einer Quantität mehr wegnehmen oder hergeben soll, als solche beträgt oder als man davon im Vermögen hat, so kann man dieß dadurch, daß man sich das hiezu noch Fehlende durch Borgen verschaffet. Das Geborgte ist nun eine Schuld, die man wieder von seinem erhalteuden Vermögen, d. i. einer wieder hinzugethanenen Quantität zurückgeben, also davon wegnehmen muß.

Zusaetze:

1tens, Wenn man eine Schuld und kein Vermögen hat, so hat man soviel als die Schuld beträgt weniger als 0 Vermögen, die Schuld ist daher als eine Minus-Größe zu betrachten; sie ist auch als eine von dem wieder hinzukommenden (hiezu addirt werdenden) Vermögen weg-

zunehmende (zu subtrahirende) Größe zu betrachten.

2tens, Dergleichen Größen, welche wie Vermögen und Schuld oder wie zu addirende und zu subtrahirende gleichartige Größen bei ihrer Vereinigung einander vermindern, heißen entgegengesetzte Größen; die dann aber einander vermehren, heißen übereinstimmige.

3tens, Diejenige Größe, welche gegen ein wirkliches Haben eine Minus-Größe (nach 1tens) ist, bezeichnet man mit dem vorgesetzten Zeichen (—) und heißt sie negative oder verneinende Größe, daher die ihr entgegengesetzte (nach 2tens) mit dem vorgesetzten Zeichen (+) und heißt sie eine bejahende oder positive Größe.

4tens, Das, was man borgen muß, um mit seinem Haben Etwas hergeben zu können, erhält man, wenn man das, was man hat, von dem, was man hergeben soll, abzieht. (nach §. 15, 1tens).

5tens, Wenn man von einer Quantität eine größere wegnehmen, d. i. subtrahiren soll, so erhält man eine Minus-Größe, welche nach 4tens, bestimmt wird.

Anmerkung.

Die weitere Auseinandersetzung und die Rechnung mit entgegengesetzten Größen folgt in der Buchstabenrechnung.

Vierter Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen.

§. 19.

Aufgabe:

Ganze Zahlen zu addiren, z. B. die Zahl 13450899 und die Zahl 4100987006.

Auflösung:

1tens, Man schreibe die Zahlen von der rechten zur linken Hand nach der Zifferfolge unter einander, mache einen

Strich darunter und fange nun von der rechten zur linken Hand an, die Einheiten der ober einander stehenden Ziffern nach der Ordnung zusammen zu zählen.

2tens, Betragen diese bei einer Reihe durch eine Zahl geschrieben, nur ein Ziffer, so schreibe man solches darunter;

3tens, Beträgt diese Zahl aber mehr als ein Ziffer, so schreibe man deren 1tes Ziffer rechts darunter und zähle das andere oder die übrigen Ziffern als Zahl nach ihren ausdrückenden Einheiten zu der nächsten Zifferreihe, wenn nemlich noch eine solche vorhanden ist, außerdem man solche Zahl gleich unter den Strich ebenso hinschreibet.

4tens, Stehen zuletzt zwar noch Ziffern, aber nicht mehr ober einander, so macht dieß keinen Unterschied in dem angegebenen Verfahren.

5tens, Die dadurch unter den Strich erhaltende Zahl ist die verlangte Summe; es ist also bei obigem Beispiel

13450890.
4100987006.
die Summe = 4114437896.

und bei

320.
897.
633.
ist die Summe = 1850.

Beweis:

Zahlen werden (nach §. 13, Erkl. 1.) addirt, wenn man ihre Einheiten, d. i. ihre Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. zusammenzählt. Nun stehen (nach der Auflösung 1tens.) die Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern, u. s. w.; machen nun die Einer zusammen nicht mehr als 9, so schreibe man ihre Anzahl darunter, machen sie aber mehr, z. B. 10, so ist dieß soviel als 0 Einer und 1 Zehner, man schreibe daher das 0 unter die Einer, und zähle das 1 zu den Zehnern; und beträgen die Einer z. B. 123, so ist dieß soviel als 3

Einer und 12 Zehner, man schreibe daher das 3 unter die Einer und zähle die Zahl 12 zu den Zehnern. Ebenso wie bei den Einern, gilt dieß von den Zehnern, Hundertern u. s. w.; es wird daher auch sofort mit den Zehnern, Hundertern u. s. w. verfahren, und daher die Summe der Zahlen in einer Zahl gemäß der Auflösung erhalten.

§. 20.

Aufgabe:

Benannte Zahlen einerlei Benennung zu addiren.

Auflösung:

Man addire die Zahlen nach §. 19. und gebe der dadurch erhaltenden Zahl die nemliche Benennung, denn da die Zahlen sich auf einerlei Größen beziehen, so muß auch ihre Summe sich auf dieselbe Größe beziehen.

§. 21.

Aufgabe:

Benannte Zahlen verschiedenerlei Benennung zu addiren.

Auflösung:

Dieß kann, so lange sie nicht auf einerlei Benennung gebracht worden, nicht wirklich geschehen, wohl aber ihr Zusammengehören nach §. 17. angedeutet werden.

Zusatz:

Wie aus §. 3, 1^{tens}, zu ersehen, wird man allen Dingen in irgend einer Beziehung einerlei Namen geben, sie daher auf einerlei Benennung bringen können; allein dieß wird im engern Sinne unter diesem Ausdruck nicht verstanden, sondern man versteht nur darunter, eine Größe auf den Namen der andern bringen, insoferne sie ein Vielfaches oder ein Theil dieser andern ist. Wie dieses geschehen kann, wird in der Lehre der Multiplication §. 30. und Division §. 38. gezeigt werden.

§. 22.

Zusatz:

Nach §. 17. ist (3+4) ein Ausdruck einer Summe, und also nach §. 15, 6tens.

a); $2+(3+4) = 5+4 = 6+3$;

b); $(3+4)+2 = 5+4 = 3+6$; und

$(3+4)+(5+6) = 8+10 = 9+9 = 14+4 = 3+15$;

dann nach §. 15, 4tens, ist,

da $3+4=7$, auch $3+4+6 = 7+6$;

= $7>6$, = $(7+3) > (6+3)$;

= $6<7$, = $(6+3) < (7+3)$;

= $7>6$ und $5>3$, auch $(7+5) > (6+3)$;

= $6<7$ = $3<5$, = $(6+3) < (7+5)$;

= $6=(4+2)$ und $5>3$, auch $(6+5) > (4+2+3)$.

§. 23.

Aufgabe:

Von einer größeren Zahl eine kleinere abzuziehen, z. B. von 6730458 die Zahl 467826.

Auflösung:

1tens, Man setze die kleinere Zahl wie bei der Addition unter die größere, mache einen Strich darunter, und ziehe von der rechten zur linken Hand jedes Ziffer von dem ober ihn stehenden Ziffer ab, und schreibe den Rest darunter, so erhält man den ganzen Rest in einer Zahl.

2tens, Ist das oberhalbstehende Ziffer hiebei kleiner als das untenstehende, so nehme man von dem nächsten Ziffer links, 1 weg, zähle solches mit 10 zu dem, wovon man abziehen soll, und wäre das nächste Ziffer ein 0, so hat man von dem weiters nächsten obern Ziffer, 1 wegzunehmen und dieses mit 9 zu dem oder den folgenden Nullen und mit 10 zu dem folgenden Ziffer rechts, wovon man abziehen soll, zu zählen, wodurch man also das unter ihm stehende Ziffer abziehen kann.

Anmerkung:

Damit man nicht vergißt, daß man von einem Ziffer 1 weggenommen oder geborgt hat und also dieses Ziffer 1 we-

niger gilt, so mache man sogleich bei dem Borgen einen Punkt oberhalb solches, so wie oben das oder die 0en, welche (nach 2tens) dadurch 9 gelten.

Bei obigem Beispiele ist also

6730458
467826
der Rest = 6262632.

Beweis:

Zahlen werden (nach §. 13, 2tens) subtrahirt, wenn man die Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. des Subtrahends von den Einern, Zehnern, Hundertern u. s. w. des Minuends abzieht; durch das angegebene Untereinandersetzen stehen nun Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern, u. s. w., man hat daher nur von jedem Ziffer das unter ihm stehende abziehen, wodurch man den verlangten Rest in einer Zahl erhält. Das nach 2tens, angegebene Verfahren wegen des Borgens ist aus der Lehre unseres Zahlensystems absolut richtig, denn es ist z. B. bei obiger Rechnung die Zahl 30 soviel als 29 Einheiten ihrer und 10 der nachfolgenden niederern Ordnung, so wie die Zahl 7 soviel als 6 Einheiten ihrer und 10 der nachfolgenden niederern Ordnung.

Zusätze:

1tens, Man kann auch das, was man von dem nächsten Ziffer des Minuends borgen muß, immer zu dem nächsten Ziffer des Subtrahends zählen; z. B. soll man von 67 die Zahl 49 abziehen, so sage man, 9 von 17 bleibt 8, und zähle das geborgte 1 zu 4, und ziehe dann also 5 von 6 ab. Diese Methode des Abziehens gewährt besonders Vortheil, wenn der Subtrahend aus mehreren Posten besteht, indem man nach derselben diese Posten weder nach und nach zu subtrahiren, noch dieselben erst in eine Summe zu nehmen und dann diese abzuziehen braucht, sondern, wie folgt, verfährt. Wenn z. B. von 34504 die Zahlen 6345, 7489 und 18478 abzuziehen sind, so setze man unter den Minuend die Posten des Subtrahends wie bei der Addition, bezeichne diese

mit dem vorgesetzten Zeichen —, addire die Ziffern des Subtrahends von der rechten zur linken Hand und ziehe jederzeit die Summe der oberhalb einander stehenden Ziffern desselben von dem ober diesen stehenden Ziffer des Minuends ab, und setze den Rest unter den Strich, d. i.

34504
— 6345
— 7489
— 18478
giebt *2192.

denn 5, 9 und 8 macht 22, und 22 von 24 bleibt 2; das geborgte 2, dann 4, 8 und 7 macht 21, und 21 von 30 bleibt 9; das geborgte 3, dann 3, 4 und 4 macht 14, und 14 von 15 bleibt 1; das geborgte 1, dann 6, 7 und 8 macht 22, und 22 von 24 bleibt 2; das geborgte 2 und 1 macht 3, und 3 von 3 bleibt Nichts.

Besteht der Minuend gleichfalls aus mehreren Posten, so bezeichne man solche mit dem vorgesetzten Zeichen +, addire von der rechten zur linken Hand sowohl die ober einander stehenden Ziffern des Minuends, als die des Subtrahends, ziehe die Summe der letztern von der der erstern ab und zähle, wenn diese Summe des Minuends größer ist, und der Rest aus mehr als einer Ziffer besteht, die Zahl des Restes ohne dessen erstes Ziffer rechts, welches man unter den Strich schreibt, zu der nächsten Reihe des Minuends; ist aber die Summe des Subtrahends größer, so zähle man das, um abziehen zu können, Geborgte zu den Ziffern der nächsten Reihe des Subtrahends. Z. B. Wenn die Zahlen 7376, 6498 und 17096 addirt und dann 1403, 7868 und 3459 abgezogen werden sollen, so schreibe man diese Zahlen so an:

1
+ 7376
+ 6498
+ 17096
— 1403
— 7868
— 3459
1

giebt 18240.

denn 6, 8 und 6 macht 20, dann 3, 8 und 9 macht 20, und 20 von 20 bleibt 0, welches man unter den Strich schreibt; 7, 9 und 9 macht 25, dann 0, 6 und 5 macht 11, und 11 von 25 bleibt 14, daher man das 4 unter den Strich schreibt und das 1 zu der nächsten Reihe des Minuends zählt und es hiezu oder solche schreibt; 1, 3, 4 und 0 macht 8, dann 4, 8 und 4 macht 16, und 16 von 18 bleibt 2, welches man unter den Strich schreibt, und das geborgte 1 zu der nächsten Reihe des Subtrahends zählt, es daher unter solche schreibt; 7, 6 und 7 macht 20, dann 1, 7, 3 und 1 macht 12, und 12 von 20 bleibt 8, welches man, so wie das 1 der nächsten Reihe des Minuends, von welchem Nichts abzuziehen ist, unter den Strich setzet.

Wäre die ganze Summe des Subtrahends größer, als die des Minuends, so zieht man ebenso die Posten des Minuends von denen des Subtrahends ab, und setzt dem Reste nach nächstem 3ten Zusatz das Zeichen (—) vor.

2tens, Dasselbe Verfahren beobachte man, wenn man Zahlen mit verschiedenen Zeichen addiren soll, indem hiebei nach §. 18, diejenigen mit dem Zeichen (—) als zu subtrahirende zu betrachten sind.

3tens, Wenn man von einer Zahl eine größere abzieht, so erhält man (nach §. 18, Zus. 5.) eine negative Zahl, deren Einheiten man findet, wenn man die kleinere Zahl von der größern abzieht; es ist daher z. B. 367—426 = — (426—367) = —59.

4tens, Eine Zahl, welche zu einer gegebenen Zahl addirt, die nächst höhere Einheit dieser gegebenen Zahl, d. i. eine Zahl 1 mit soviel angehängten Nullen, als die gegebene Zahl Ziffern hat, giebt, heißt die arithmetische Ergänzung oder das decadische Complement dieser gegebenen Zahl.

Dieses Compl. dec. wird dadurch schnell gefunden, indem man nur alle Ziffern der gegebenen Zahl von 9 und ihr letztes oder niedrigstes Ziffer von 10 abzuziehen braucht, um es zu erhalten; d. i. z. B. von 435 ist Compl. dec. = 565, also ist nach §. 15, 5^{tens}, 435 = 1000—565, und nach §. 15, 7^{tens} c, wird daher eine gegebene Zahl subtrahiret, wenn man ihre arithm. Erg. dem Minuend addirt, und von der Summe die nächst höhere Einheit der gegebenen Zahl abzieht; z. B. 618 — 435 = 618 — (1000 — 565) = (618 + 565) — 1000 = 1183 — 1000 = 183, welches, bei Rechnungen mit Logarithmen angewendet, vielen Vortheil gewährt.

5tens, Was von benannten Zahlen nach §. 20 und 21. in Beziehung der Addition gesagt wurde, gilt ebenso von ihnen in Beziehung der Subtraction.

Anmerkung:

Man muß sich auch die Fertigkeit eigen machen, die Summe oder Differenz zweyer Zahlen aus dem Kopfe angeben zu können, weil man hiezu nicht immer Schreibmaterial bei sich hat.

§. 24.

Nach §. 15, 6^{tens} ist

a) 9 — (3 + 4) = 6 — 4 = 5 — 3:

b) (7 + 5) — 3 = 4 + 5 = 7 + 2;

dann (12 + 8) — (5 + 2) = 7 + 6 = 10 + 3 = 5 + 8 = 12 + 1;

e) (7 + 5) = (7 + 3) + (5 — 3) = (7 — 4) + (5 + 4);

und da nach §. 17, (7—4) ein Ausdruck eines Restes ist, so ist nach §. 15, 7^{tens},

a) $6+(7-4)=13-4=2+7$;

b) $(7-4)+1=8-4=7-3$;

dann $(8+6)+(7-3)=15+3=5+13=12+6=8+10$;

$(13-6)+(2+3)=15-3=16-4=18-6=13-1$;

und $(18-15)+(12-10)=30-25=8-3=20-15=18-13$;

c) $10-(7-4)=3+4=14-7$;

d) $(7-4)-1=6-4=7-5$;

dann $(12+8)-(5-2)=7+10=14+3=9+8=12+5$;

$(28-10)-(7+2)=21-12=26-17=19-10=28-19$;

und $(28-10)-(8-5)=20-5=33-18=25-10=28-13$;

g) $(7-4)=(7+3)-(4+3)=(7-2)-(4-2)$;

ferner nach §. 15, 5^{tens}, ist

da $(7-4)=3$, auch $(7-4)-2=3-2$:

$=7>4$, $=(7-3)>(4-3)$;

$=7=(3+4)$ und $5>2$, auch $(7-5)<(3+4-2)$;

$=7>6$, $=2<5$, $=(7-2)>(6-5)$;

Fünfter Abschnitt.

Von der Multiplication und Division ganzer Zahlen.

§. 25.

Erklaerung:

Zahlen durcheinander multipliciren, heißt (nach §. 16, 1^{tens}) die eine Zahl so oft nehmen, als es die andere angiebt, oder was einerlei ist, ihr einen sovielmal höheren Werth geben, als es diese Zahl verlangt, und diesen neuen Werth durch eine Zahl ausdrücken.

§. 26.

Aufgabe:

Ein Ziffer durch ein anderes zu multipliciren.

Auflösung:

Man sehe, wie viele absolute Einheiten ein Ziffer, so oft genommen, als es das andere Ziffer angiebt, nach unse-

rem Zahlensysteme enthält, und schreibe die, solche Einheiten angebende Zahl unter den Strich, worüber man ober einander die beyden Factoren gesetzt hat, d. i. z. B.

$$\begin{array}{c|c} 7 & 6 \\ 6 & \text{oder} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 6 & \\ 7 & \\ \hline \end{array}$$

Produkt = 42; 42;

Beweis:

Die Richtigkeit der Auflößung geht aus §. 25. deutlich hervor.

Anmerkung.

Das Produkt, das zwey Ziffer als Factoren geben, muß man aus einer, dieselben enthaltenden Tabelle, dem sogenannten Einmaleins, seinem Gedächtnisse einprägen, um schnell multipliciren zu können. Nachstehende ist eine dergleichen Tabelle, und es steht in solcher, wenn man ein Ziffer oben in der horizontalen Reihe als den einen, und ein Ziffer in der vordern verticalen Reihe als den andern Factor nimmt, deren Produkt in dem Ecke des rechten Winkels, den beyde Factoren dadurch bilden, daß man sich von dem einen die Linie herunter, und von dem andern herüber gezogen denkt; es ist nemlich z. B. 6×7 = 42; und 9 . 9 = 81.

Tabelle des Einmaleins.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 27.

Zusaetze:

1tens, Jede Zahl mit 0 multiplicirt, giebt zum Produkte 0, denn Nichts noch so oft genommen bleibt Nichts, d. i. z. B. 8 . 0 = 0 . 8 = 0;

2tens, Jede Zahl mit 1 multiplicirt, giebt zum Produkte dieselbe Zahl, und es ist daher jede Zahl einem Produkte aus ihr und dem Factor 1 gleich, d. i. z. B. 8 = (1.8).

3tens, Jede Zahl wird mit 10, 100, u. s. w. multiplicirt, wenn man ihr soviele Nullen rechts beisetzet, als hinter dem 1 folgen, denn dadurch wird jedes Ziffer, folglich (nach §. 15, 6tens, c) die ganze Zahl in ihrem Werthe nach Verlangen erhöhet, d. i. z. B. 26 . 10 = 260.

4tens, Bei der Addition mehrerer Zahlen (§. 19, 1tens) giebt man einen Summanden einen 10 mal höheren Werth, wenn man ihn um ein Ziffer mehr links, als den anderen setzet.

5tens, Jede Zahl wird durch eine andere, welche am Ende Nullen hat, multiplicirt, wenn man die Zahlen mit Weglassung dieser Nullen multiplicirt, und diesem Produkte diese Nullen am Ende beisetzet, denn z. B. 4 . 60 = 4 . (6 . 10) nach 3tens, und = (4 . 6) . 10, nach §. 16, 10tens, b), = 24 . 10 = 240.

6tens, Haben beyde Factoren Nullen am Ende, so werden solche mit einander multiplicirt, wenn man sie mit Hinweglassung dieser Nullen multiplicirt und diesem Produkte sämmtliche weggelassene Nullen am Ende beisetzet, denn z. B. 40 . 60 = (4 . 10) . (6 . 10) = (4 . 6) . (10 . 10) = 24 . 100 = 2400; nach §. 16. 10tens, a und b, und oben 3tens).

§. 28.

Aufgabe:

Jede Zahl durch ein Ziffer zu multipliciren, z. B. 31607 durch 4.

Auflösung:

Man setze das Ziffer wie bei der Addition unter die Zahl, mache einen Strich darunter, und multiplicire mit dem Ziffer die Einer, dann die Zehner, Hunderter, u. s. w. dieser Zahl, setze, wenn das einzelne Produkt nur aus einem Ziffer besteht, solches an seine nach dieser Angabe von der rechten zur linken Hand zu erhaltende Stelle, und wenn ein solches Produkt aus zwey Ziffern besteht, so setze man das Ziffer rechts, an solche Stelle und zähle das Ziffer links zu dem nächstfolgenden Produkte, so erhält man die Zahl, welche das verlangte ganze Produkt ist; d. i.

31607
4
das Produkt = 126428.

Beweis:

Es ist einerlei, ob man das Ganze auf einmal oder alle seine Theile nach und nach mit derselben Zahl multiplicirt, folglich wird eine Zahl multiplicirt, wenn man alle ihre Einer, Zehner u. s. w. multiplicirt; und erhält man z. B. dadurch 28 Einer, so ist dieß ebensoviel als 8 Einer und 2 Zehner, daher hat man das Ziffer 8 an die Stelle der Einer zu setzen und das 2 zu den erhaltenden Zehnern zu addiren, welches ebenso bei den Zehnern, Hundertern, u. s. w. zu geschehen hat, und auch nach der Auflösung geschiehet.

Anmerkung.

Man gewöhne sich, hiebei immer das Ziffer des Multiplicators voraus zu nennen, indem dieses eine Multiplication im Kopfe erleichtert.

§. 29.

Aufgabe:

Jede Zahl mit einer andern aus mehr als einem Ziffer bestehenden Zahl zu multipliciren, z. B. 35607 mit 2034.

Auflösung:

Man setze wieder die Zahlen wie bei der Addition unter einander, mache einen Strich darunter, multiplicire mit

jedem Ziffer der untern Zahl von der rechten zur linken Hand die obere Zahl nach §. 28, schreibe das Produkt mit dem ersten Ziffer unter den Strich, das Produkt mit dem zweyten Ziffer so unter das erste Produkt, daß das niedrigste Ziffer (die Einer) dieses zweyten Produktes unter das 2te Ziffer (die Zehner) des 1ten Produktes und die übrigen Ziffern nach der Reihenfolge unter einander zu stehen kommen; und ebenso schreibe man das Produkt mit dem 3ten Ziffer unter das Produkt mit dem 2ten Ziffer u. s. w. Hat man bei der untern Zahl ein 0, so nehme man solches gleich zu der nächsten Zahlziffer und multiplicire mit solchen nach §. 27, Zus. 5, welches, wenn dasselbe nicht das erste Produkt ist, dadurch geschiehet, daß man das Produkt mit der nächsten Zahlziffer um eine Stelle mehr, also um 2 Stellen links gegen das vorher angeschriebene Produkt anschreibt. Ist nun auf diese Art die obere Zahl mit allen Ziffern der untern Zahl multiplicirt, so mache man unter die wie oben bemerkt angeschriebenen einzelnen Produkte einen Strich, addire dieselben so, wie sie unter einander stehen, so giebt die erhaltende Summe das ganze Produkt; d. i.

35607
2034

142428
106821

71214

Produkt = 72424638.

Beweis:

Eine Zahl mit einer andern multipliciren, heißt nach §. 15. 6tens, c u. d) ihre Einer, Zehner u. s. w., mit den Einern, Zehnern u. s. w. der andern Zahl multipliciren und diese einzelnen Produkte addiren; nun wird eine Zahl mit dem Ziffer, welches die Zehner ausdrückt, multiplicirt, wenn man sie mit dem Ziffer (als Einer) nach §. 28. multiplicirt und dem Produkte einen 10mal höheren Werth giebt, (nach §. 16. 10tens, b), denn z. B. 4 Zehner sind = 4.10 Einer; diesen 10mal höheren Werth erhält aber dieses Produkt durch

die angegebene Untereinandersetzung (nach §. 27. 4tens), so wie auch alle übrigen einzelnen Produkte nach der gegebenen Auflösung ihren richtigen Werth dadurch erhalten; es ist daher ihre Summe das richtige Produkt der beyden Zahlen.

Anmerkungen.

1tens. Kommt im Multiplicator die Zahl 1 vor, so kann man den Multiplicand als das schon angeschriebene Produkt mit 1 nehmen, indem man die Produkte der niederern Ziffern rechts ausrückt und dadurch ihm seine zugehörige Stelle giebt, d. i. z. B.

1tens, 24.12; 2tens, 24.213;

48 72

Produkt = 288; 48

Produkt = 5112;

2tens. Da es sehr oft vorkommt, daß man nur Zahlen mit 2 Ziffern mit einander zu multipliciren hat, so ist es zur schnelleren Multiplication sehr gut, wenn man sich auch das Produkt, das ein Ziffer und eine zweyzifferige Zahl mit einer zweyziffrigen Zahl geben, aus einer darüber gefertigten Tabelle seinem Gedächtnisse einprägt.

§. 30.

Zusaetze:

1tens, Eine benannte Zahl wird nach §. 16. 1tens, durch eine unbenannte Zahl multiplicirt, wenn man die Zahlen multiplicirt und dem Produkte die Benennung der benannten Zahl giebt; d. i. z. B. 3 Aepfel × 2 = 6 Aepfel.

2tens, Benannte Zahlen kann man nach §. 16. 8tens, nicht mit einander multipliciren.

3tens, Ist eine Größe ein Vielfaches einer andern, so darf man nur die Quantität der erstern durch die Zahl, welche das Vielfache ausdrückt und welche die Reduktionszahl heißt, multipliciren, um das Produkt zu erhalten, welches die Benennung (§. 21. Zus.) der andern Größe erhält und der erstern gleich ist; d. i. z. B. da 1 Gulden das 60fache eines Kreuzers, d. i. 1 Gulden = 60 Kreuzer ist, so sind auch (nach §. 16. 9tens)

2 Gulden = 2.60 Kreuzer, welches Verfahren man resolviren nennt.

Anmerkung.

Aus dem am Ende beigefügten Anhange ist die Reduktionszahl mehrerer Größen zu ersehen und sich eigen zu machen.

4tens, Wenn von dem Einfachen einer Größe bekannt ist, welche Quantität einer andern Größe ihr für irgend einen Fall entspricht, und von diesen beyden Größen, wenn die eine sich vervielfacht, auch die andere um ebensoviel mal größer wird, so erhält man (nach §. 16. 9tens) für irgend ein Vielfaches der erstern, die demselben für eben diesen Fall entsprechende Quantität der andern Größe, wenn man die, dem Einfachen der erstern Größe entsprechende Zahl der andern durch die Zahl multiplicirt, welche das gegebene Vielfache der erstern angiebt; z. B. wenn 1r Elle Tuch der Preiß von 4 fl. entspricht, so entspricht dem Werthe von 6 Ellen desselben Tuches der Betrag von (6.4) fl. = 24 fl.; und zwey Größen stehen zu einander in dem Verhältniß, daß die eine um ebensoviel mal wächst, als die andere, d. i. sie stehen zu einander im geraden Verhältnisse, wenn man von ihnen der Erfahrung gemäß sagen kann »je mehr von der einen genommen wird, desto mehr wird auch die andere«, welches bei dem gegebenen Beispiele der Fall ist, denn mehr Tuch von einer fraglichen Sorte kostet auch mehr Geld.

Das gegebene Vielfache der erstern Größe könnte auch eine Größe anderer Benennung seyn, wo dann, um das richtige Resultat hiernach anzugeben, dieses Vielfache vorher auf die Benennung des gegebenen Einfachen (nach 3tens) resolvirt werden muß; z. B. es wäre die Frage, wie viele Lothe man um 3 fl. erhält, wenn man um 1 kr. von der fraglichen Waare 3 Loth bekommt, so muß man statt der 3 fl. ihren gleichen Werth von 180 kr. setzen, wornach sich ergiebt, daß man dafür (180.3) Loth = 540 Lothe erhält.

5tens, Ebenso erhält man aus der, einem Theile einer Größe entsprechenden Quantität einer andern mit ihr im geraden Verhältnisse stehenden Größe, die Quantität dieser andern, welche dem Einfachen (Ganzen) der erstern Größe zukommt, wenn man die gegebene Quantität mit der Zahl multiplicirt, welche den Theil der erstern Größe angiebt; z. B. wenn in dem 3ten Theile einer Woche eine gewisse Zahl Menschen einen Graben von 30 Fuß Länge verfertigen, so bringen bei sonst gleichen Umständen diese Menschen in 1r Woche einen dergleichen Graben von (3.30) = 90 Fuß Länge fertig.

6tens, Nach §. 15. 6tens,

c) ist (3+4).2=6+8=8+6;

d) = 2.(3+4)=6+8=8+6;

dann (8+6).(2+3)=(16+12)+(24+18)

und nach §. 15. 7tens,

e) ist (6—2).5=30—10;

f) = 5.(6—2)=30—10;

daher (18—6).(2+3)=(36—12)+(54—18);

(8+6).(5—2)=(40+30)—(16+12);

(18—6).(5—2)=(90—30)—(36—12);

dann, da nach §. 17, (3.4) ein Ausdruck eines Produktes ist, so ist nach §. 16. 10tens,

a) (3.4).2=6.4=3.8;

b) 2.(3.4)=6.4=3.8;

dann (3.4)×(5.6)=15.24=18.20=90.4=3.120;

und nach §. 16. 9tens, ist,

da 3+4=7, auch (3+4).2=7.2;

= 7=7, und 5>3, auch (7.5)>(7.2); und

= 7>6, = 5>3, = (7.5)>(6.3);

§. 31.

Erklärung:

Zahlen zu dividiren, heißt (nach §. 16, 3tens) die Zahl zu finden, welche mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden zum Produkte giebt, d. i. die Zahl finden, wel-

che einen sovielmal kleineren Werth, als es der Divisor angiebt, gegen den Dividenden hat.

§. 32.

Aufgabe:

Ein Ziffer durch ein anderes zu dividiren, z. B. 6 durch 3, und 8 durch 3.

Auflösung und Beweis:

1tens, Aus dem Einmaleins wissen wir, daß 2.3=6, folglich ist nach §. 31 auch

$$6 : 3 = 2,$$

2tens, Nach §. 15. 6tens c) wird eine Summe dividirt, wenn man alle ihre Theile, d. i. die Summanden dividirt, also da 8=6+2, so ist

8:3=(6:3)+(2:3); folglich ist nach 1tens,

8:3= 2 +(2:3);

3tens, Es wird daher ein Ziffer durch ein anderes dividirt, wenn man das mit dem Dividend gleiche oder nächst kleinere Produkt des Divisors mit einer ganzen Zahl aus dem Einmaleins unter den Dividend und diese ganze Zahl in den Quotienten schreibt, sodann das Produkt von dem Dividend abzieht; bleibt nun hierdurch kein Rest, so ist die in den Quotienten gesetzte Zahl der gesuchte Quotient; bleibt aber ein Rest, so muß noch dieser durch den Divisor dividirt und der erhaltende Quotient zu der in den Quotienten gesetzten Zahl addirt werden. Dieser letzte Quotient ist aber (nach §. 7. 10tens) eine gebrochene Zahl, welche, so lange bis die Rechnung mit solchen gelehret, nach §. 17. zu der ersteren ganzen Zahl addirt wird, d. i.

6:3=2; u. 8:3=2+(2:3);

6	6
bleibt 0 oder *	2

so wie auch der Quotient 2+(2:3) mit dem Divisor 3 multiplicirt, den Dividend richtig wieder giebt, denn

$(2+(2:3))\times 3 = 2.3+(2:3).3$; nach §. 15, 6^{tens}, c)

$= 6 + 2$; nach §. 16, 5^{tens},

$= 8$;

also die Division nach §. 16, 6^{tens}, richtig vollzogen war.

§. 33.

Zusätze:

1^{tens}, Ist der Divisor größer als der Dividend, so wird die verlangte Division nach §. 17. ebenfalls so lange bis die Rechnung mit gebrochenen Zahlen gelehret, blos angedeutet, d. i. z. B. $4:5 = (4:5)$;

2^{tens}, Ebenso wird eine zweyzifferige Zahl durch eine einzifferige, welche größer als das 1te Ziffer (die Zehner) des Dividends ist, nach vorigem §. dividirt, wenn man, da sie nicht in den Zehnern enthalten ist, die Zehner zu den Einern rechnet, und wie vorher dividirt, d. i. z. B. $36:4=9$.

3^{tens}, Null durch jedes Zahlziffer dividirt, giebt nach §. 27, 1^{tens}, zum Quotienten 0, d. i. z. B. $0:8=0$.

4^{tens}, Jede Zahl durch 1 dividirt, giebt nach §. 27, 2^{tens}, die unveränderte Zahl zum Quotienten, und es kann daher jede Zahl als Quotient betrachtet werden, d. i. z. B. $8=(8:1)$.

5^{tens}, Jede Zahl durch sich selbst dividirt, giebt zum Quotienten 1, d. i. z. B. $8:8=1$;

6^{tens}, Jede Zahl, deren letzte Ziffern (rechts) Nullen sind, wird nach §. 27, 3^{tens}, durch 1 mit nicht mehreren angehängten Nullen, als die Zahl selbst hat, dividirt, wenn man soviel Nullen im Dividend wegstreicht, als der Divisor enthält, d. i. z. B. $260:10=26$; und $2600:10=260$.

7^{tens}, Im Dividend und Divisor kann man die am Ende befindlichen gleichviel Nullen wegstreichen, denn nach §. 16, 11^{tens}, c) wird der Quotient (nach 6^{tens}) dadurch nicht geändert, d. i. z. B. $37500:40=3750:4$.

8tens, Bleibt bei der Division, wie in §. 32. gezeigt, kein Rest, d. i. ist der Quotient eine ganze Zahl, so ist der Divisor (nach §. 7, 10tens) ein Maaß (wirkliches) des Dividends.

9tens, Der bei der Division bleibende Rest kann nie so groß als der Divisor seyn; hat man daher bei der Division solchen so groß oder größer, als der Divisor ist, erhalten, so ist es ein Zeichen, daß man den Quotienten zu klein genommen hat, folglich ihn größer nehmen muß.

§. 34.

Zusatz:

Nach §. 15, 6tens, c) ist (6+8):2=3+4=4+3;
dann nach §. 15, 7tens, e) ist (8—6):2=4—3;
ferner nach §. 16, 10tens,
c) ist (8.6):2=4.6=8.3;
d) = 24:(6.2)=4:2=12:6;
dann (12.6):(2.3)=6.2=4.3=2.6=12.1;
e) ist (16.4)=32.2=8.8;
und nach §. 16, 11tens, ist
a) (24:6).3=72:6=24:2;
dann (36:12).(2.3)=72:4=108:6=216:12=36:2;
b) (24:6):3=8:6=24:18;
dann (32:8):(4.2)=8:16=16:32=4:8=32:64;
c) 6.(8:3)=48:3=2.8;
dann (18.6).(4:2)=72.3=9.24=36.6=18.12;
und (32:8).(4:2)=128:16=16:2=64:8=32:4;
d) 24:(8:2)=3.2=48:8;
dann (18.6):(6:3)=3.18=54.1=9.6=18.3;
und (24:8):(4:2)=6:4=48:32=12:8=24:16;
e) 24:4=12:2=48:8;
und nach §. 16, 9tens, ist,
da 3+4=7, auch 14:(3+4)=14:7;
= 8>4, = (16:8)<(16:4);
= 8<16, und 4>2, auch (8:4)<(16:2);
= 8>4, auch (8:2)>(4:2);

§. 35.

Aufgabe:

Eine zweyzifferige Zahl durch eine einziffrige, welche kleiner, als das 1te Ziffer (die Zehner) des Dividends ist, zu dividiren, z. B. 42 und 53 durch 2.

Auflösung:

Man dividire das 1te Ziffer links, ohne eine weitere Rücksicht zu nehmen, wie im §. 32. angegeben ist, setze aber zu dem bleibenden Reste, oder auch, wenn kein Rest bleibt, das nächste Ziffer des Dividends, so wie es oben steht, herunter, dividire die dadurch entstehende Zahl wieder durch den Divisor nach §. 32, und setze den erhaltenden Quotienten rechts neben das schon in denselben geschriebene Ziffer, wodurch man den richtigen Quotienten erhält, d. i.

46:2=23; und 53:2=26+(1:2);

4	4
*6	13
6	12
*	*1

Beweis:

Eine Zahl dividiren, heißt nach §. 15, 6tens, c) alle ihre Einer, Zehner u. s. w. dividiren; dividirt man nun die Zehner, so ist der Quotient auch ein Zehner, und dividirt man die Einer, zu welchen man die bei der Division der Zehner in Rest gebliebenen Zehner zählet, so ist der Quotient auch ein Einer, (nach §. 13, 4tens). Da nun dieses zu erhaltende Resultat nach dem angegebenen Verfahren wirklich erzielt wird, so ist die Auflößung richtig, welches auch aus der Multiplication des erhaltenen Quotienten mit dem Divisor hervorgeht, weil solche den Dividenden zum Produkte geben.

§. 36.

Zusaetze:

1tens, Ebenso wird eine 3ziffrige Zahl durch ein Ziffer, welches größer, als deren erstes Ziffer links ist, dividirt,

wenn man dieses erste Ziffer, wie bei §. 33, 2^{tens}, angegeben, als Zehner zu dem 2ten Ziffer (als Einer betrachtet) zählt, und dann nach §. 35 verfährt; d. i. z. B.

237 : 3 = 79.

21.
*27
27
*

2^{tens}, Wenn man eine mehrziffrige Zahl durch ein Ziffer zu dividiren hat, so dividire man deren erste 2 oder 3 Ziffern (links) nach §. 35 oder obigem 1ten Zus., setze zu dem bleibenden Reste das nächste Ziffer des Dividends, und fahre mit der hiernach angegebenen Division so lange fort, bis man dadurch den ganzen Dividenden, nemlich alle seine Ziffern dividirt, und also den verlangten Quotienten erhalten hat; d. i. z. B.

45600264 : 6 = 7600044;

42
*36
36
*0
0
*0
0
*2
0
26
24
*24
24
*

§. 37.

Aufgabe:

Eine mehrziffrige Zahl durch eine zweyziffrige zu dividiren, z. B. 1458384 durch 23.

Auflösung:

1tens, Man sehe, wie oft das 1te Ziffer (links) des Divisors in dem 1ten Ziffer (links) des Dividenden, oder wenn es größer als dasselbe ist, wie oft es in den beyden ersten Ziffern des Dividends enthalten ist, multiplicire den dieß angebenden Faktor mit dem Divisor, und ist nun das erhaltende Produkt so, daß man es von den ersten zwey oder drey Ziffern (je nachdem das 1te Ziffer des Divisors in dem 1ten oder in den beyden ersten Ziffern des Dividends enthalten ist) abziehen kann und kein gleicher oder größerer Rest, als der Divisor beträgt, dadurch bleibt, so ist dieser erhaltene Faktor das richtige erste Ziffer des Quotienten; außerdem aber hat man erst den Faktor zu suchen, welcher dieser Angabe entspricht.

2tens, Zu dem nach 1tens, gebliebenen Reste setze man nun, wie es im §. 35 angegeben ist, das nächste Ziffer des Dividends und dividire nun die dadurch erhaltene Zahl wieder durch den Divisor, indem man, wie bisher gesagt, verfährt und den Quotienten als des ganzen Quotienten nächstes Ziffer anschreibt.

3tens, Die nach 2tens, angegebene Division setze man so, wie es im §. 36, 2tens, gelehret, bis zum Ende fort, so erhält man den gesuchten Quotienten.

4tens, Ist hiebei ein Rest mit beigesetztem nächsten Ziffer des Dividends kleiner, als der Divisor, so ist der Quotient hier hiervon = 0, welches man sogleich in den Quotienten schreibt, und zur Abkürzung das weitere nächste Ziffer des Dividends noch zu dem Reste herunter setzet, und nun aufs Neue nach dieser Angabe verfährt; d. i.

1458384 : 23 = 63408;

138

*78

69

*93

92

*184

184

*

Beweis:

Die Richtigkeit der Auflösung geht aus §. 35 und §. 36. deutlich und leicht hervor.

Zusatz;

Ebenso wird jede mehrziffrige Zahl durch eine mehr als 2ziffrige Zahl dividirt, wenn man das nach obiger Auflösung 1^{tens}, erhaltene Produkt des Divisors mit dem ersten Ziffer des Quotienten, von denen ersten Ziffern (links) des Dividends abzieht, zu dem Reste das nächste Ziffer des Dividenden schreibt, diese Zahl durch den Divisor dividirt, und dadurch das 2te Ziffer des Quotienten bestimmt, und dieses Verfahren (nach 2^{tens}) bis zum Ende nach 3^{tens} fortsetzet.

Anmerkung.

Hat man eine sehr große Zahl durch eine gegen sie viel Kleinere, oder hat man mehrere Zahlen durch ein und dieselbe Zahl zu dividiren, so ist es gut, wenn man sich die Produkte des Divisors mit allen Zahlziffern d. i. den Ziffern 1 bis 9 ausetzet, um dadurch den nach obiger Auflösung 1tens, richtigen jedesmaligen Faktor schnell zu wissen; und man erhält hiebei am bequemsten das 3fache durch Addition des 1 und 2fachen, das 4fache aus dem 2fachen, das 5fache durch Addition des 2 und 3fachen, das 6fache aus dem 3fachen, das 7fache aus dem 3 u. 4fachen, das 8fache aus dem 4fachen, und das 9fache aus dem 4 und 5fachen.

§. 38.

Zusatze:

1^{tens}, Eine benannte Zahl wird durch eine unbenannte nach §. 13, 4^{tens}, dividirt, wenn man die Zahlen dividirt und dem Quotienten die Benennung der benannten Zahl giebt; d. i. z. B. 6 Aepfel : 2 = 3 Aepfel.

2^{tens}, Ist eine Größe ein gewisser Theil einer andern, so kann man erstere auf die Benennung der andern (§. 21. Zus.) bringen, wenn man ihre Anzahl durch die Reduktions-Zahl, welche den sovielten Theil angiebt, dividirt, d. i. da z. B.

1 Kreuzer der 60te Theil 1s Gulden, also
1 = = (1:60) Gulden ist, so sind (nach §. 16, 9tens)
120 = = (120:60) = = 2 Gulden;
welches Verfahren man Reduziren nennt.

3tens, Soll von einer benannten Zahl angegeben werden, welches Vielfache sie von einer andern gleicher Benennung ist, oder soll angegeben werden, welcher Theil diese andere von der ersten ist, so darf man nur (nach §. 16, 4tens) die Zahl der erstern durch die Zahl der andern dividiren, wo dann der Quotient das verlangte Resultat angiebt. Sind die gegebenen Zahlen nicht auf einerlei Benennung, so muß man sie daher hiezu vorher (nach §. 30, 3tens, oder vorigem 2tens) auf einerlei Benennung bringen. Z. B. 6 fl. sind das 3fache von 2 fl.; weil 6:2=3 ist, und von 2 fl. sind 40 kr. der 3te Theil, weil 2 fl. = 120 kr. und 120:40=3 ist; dann wenn man um 6 fl. eine Elle Tuch erhält, so erhält man davon um 24 fl. (nach §. 30, 4tens), (24:6) Ellen = 4 Ellen.

4tens, Soll eine Zahl durch eine andere, und deren Quotient wieder durch eine andere u. s. f. dividirt werden, so ist es nach §. 16, 10tens, d) ebensoviel, als wenn man die erste durch das Produkt aller gegebenen Divisoren dividiren soll, d. i. [(24:4):2]:3=24:(4.2.3)=1;

5tens, Wenn von einem Vielfachen einer Größe bekannt ist, welche Quantität einer andern, mit ihr (nach §. 30, 4tens) im geraden Verhältnisse stehenden Größe entspricht, so erhält man (nach §. 16, 9tens) die dem Einfachen ersterer Größe entsprechende Quantität der andern, wenn man die dem Vielfachen zukommende Quantität durch die Zahl dividirt, welche dieses Vielfache angiebt; z. B, wenn dem Werthe von 6 Ellen Tuch der Preiß von 24 fl. zukommt, so kostet 1 Elle davon (24:6) fl. = 4 fl.

Ist hiebei das fragliche Einfache mit dem gegebenen Vielfachen, oder die suchende Quantität mit der bekannten nicht einerlei Benennung, so muß man solche hiezu

vorher (nach §. 30, 3tens, oder vorigem 2tens) auf einerlei Benennung bringen; z. B. wenn 3 Ctnr. einer Waare 10 fl. kosten, und man will wissen, wie viele Kr. hiernach 1 Pfd. kostet, so setze man

3 Ctnr. = 300 Pfd. kosten 10 fl. = 600 kr., daher
1 = kostet 2 kr.

6tens, Ebenso erhält man aus der Quantität einer Größe, welche dem Einfachen einer andern, mit ihr im geraden Verhältnisse stehenden Größe entspricht, diejenige Quantität der erstern, welche irgend einem Theile der andern zukommt, wenn man die dem Einfachen entsprechende Quantität durch die Zahl dividirt, welche diesen Theil angiebt; z. B. wenn man mit 6 fl. 1 Pfd. einer Waare bezahlt, so hat man hiernach für den 3ten Theil eines Pfundes dieser Waare (6:3) fl. = 2 fl. zu bezahlen. Haben die correspondirenden Größen des bekannten mit denen des gegebenen Falles nicht einerlei Benennung, so muß man solche hiezu erst vorher auf einerlei Benennung bringen; z. B. ist bekannt, daß man für 1 Cntr. einer Waare 20 fl. zahlen muß und es ist zu berechnen gegeben, wie viel Kr. der 4te Theil eines Cntrs. kostet, so setze man

1 Cntr. kostet 20 fl. = 1200 kr.; daher
der 4te Theil 1es Cntrs. kostet (1200:4) kr. = 300 kr.

und wollte man wissen, wie viel der 4te Theil eines Pfds. kostet, so setze man statt 1 Cntr. seinen Inhalt von 100 Pfd., berechne den Preiß eines Pfundes nach 5tens, und daraus den des 4ten Theils desselben, d. i.

1 Cntr. = 100 Pfd. kostet 20 fl. = 1200 kr.; daher
1 = = (1200:100) = 12 kr., und
der 4te Theil 1es = = (12 : 4) = 3 kr.

7tens, Wenn von einem Vielfachen einer Größe bestimmt ist, welche Quantität einer andern ihr entspricht, und von diesen beyden Größen, wenn die eine sich vervielfacht, die andere um ebensoviel mal kleiner wird, so erhält man die dem Einfachen der erstern, entsprechende Quantität

der andern Größe, wenn man die dem Vielfachen entsprechende Quantität durch die Zahl multiplicirt, welche das gegebene Vielfache angiebt; z. B. wenn man 2 Tage lang zu einer Arbeit 5 Mann braucht, so braucht man zu der nehmlichen Arbeit bei nur 1em Tage Zeit, (2.5) = 10 Mann; und zwey Größen stehen in dem Verhältniß, daß wenn die eine wächst, die andere um ebensoviel mal abnimmt, d. i. sie stehen im verkehrten oder ungeraden Verhältniße, wenn man von ihnen der Erfahrung gemäß sagen kann »je mehr von der einen genommen wird, desto weniger darf man von der andern nehmen, oder umgekehrt« welches bei dem gegebenen Beispiele der Fall ist, denn je weniger Zeit man zu einer Arbeit hat, desto mehr Arbeiter muß man anstellen, um sie zu vollenden.

Sind die correspondirenden Größen des bekannten und des gegebenen Falles nicht einerlei Benennung, so muß man sie hiezu vorher auf eine dergleichen bringen, z. B. ist bekannt, daß man 2 Wochen zu einer Reise braucht, wenn man täglich 5 Meilen geht, und es ist zu berechnen gegeben, wie viele Stundensäulen man machen müßte, wenn man die ganze Reise in 1em Tage zurücklegen wollte, so setze man

2 Wochen bei täglich 5 Meilen, d. i.
14 Tage = = 10 Stundens., also
1 = = = (14.10)=140 Stundens.

Zusatz:

Die Faktoren einer Zahl stehen im verkehrten Verhältnisse zu einander.

8tens, Aus der Quantität einer Größe, welche dem Einfachen einer andern mit ihr nach 7tens im verkehrten Verhältnisse stehenden Größe entspricht, erhält man die Quantität, so einem gegebenen Vielfachen dieser andern entspricht, wenn man die dem Einfachen zukommende Quantität der erstern durch die Zahl dividirt, welche das gegebene Vielfache angiebt; z. B. wenn 1 Mann zu einer

Arbeit 16 Tage braucht, so brauchen 4 Mann hiezu, wenn jeder ohne den andern zu hindern oder zu nutzen arbeitet, (16:4) Tage = 4 Tage.

Sind die correspondirenden Größen verschiedener Benennung, so müssen sie ebenso wie bei $5^{tens}_{\prime\prime}$, vorher auf einerlei Benennung gebracht werden.

$9^{tens}_{\prime\prime}$, Wenn bei $8^{tens}_{\prime\prime}$ statt der einem Vielfachen entsprechenden, die einem Theile zukommende Quantität gesucht wird, so erhält man solche, wenn man die dem Vielfachen entsprechende Quantität mit der Zahl multiplicirt, welche den gegebenen Theil angiebt; z. B. wenn 15 Mann in 1r Woche eine gewisse Summe verdienen, so verdienen diese Summe bei sonst gleichen Umständen in dem 3ten Theile 1r Woche, (15.3) Mann = 45 Mann.

$10^{tens}_{\prime\prime}$, Wenn bei $7^{tens}_{\prime\prime}$, statt der einem Vielfachen entsprechenden, die einem Theile zukommende Quantität bekannt ist, so erhält man die dem Einfachen (Ganzen) entsprechende Quantität, wenn man die bekannte Quantität durch die Zahl, welche den bekannten Theil angiebt, dividirt; z. B. wenn man zu einer Arbeit den 3ten Theil eines Monats bei hiezu nehmenden 18 Mann braucht, so braucht man bei 1 Monat Zeit hiezu (18:3) Mann = 6 Mann.

$11^{tens}_{\prime\prime}$, Will man aus einem Vielfachen einer Größe und der ihr entsprechenden Quantität einer andern Größe, die einem anderen Vielfachen der ersten Größe entsprechende Quantität von der andern suchen, so suche man nur zuerst (bei geradem Verhältniß nach $5^{tens}_{\prime\prime}$, bei verkehrtem aber nach $7^{tens}_{\prime\prime}$) die dem Einfachen der erstern Größe zukommende Quantität der andern, und bestimme aus solcher (nach §. 30, $4^{tens}_{\prime\prime}$ oder nach obigem $8^{tens}_{\prime\prime}$) die suchende Quantität; und will man aus einem Theile einer Größe und der ihm zukommenden Quantität einer andern Größe, die einem anderen Theile der erstern Größe entsprechende Quantität der andern bestimmen, so bestimme man zuerst (bei geradem Verhältniß nach §. 30, $5^{tens}_{\prime\prime}$, bei ungeradem aber nach obigem $10^{tens}_{\prime\prime}$) die dem Einfachen (Ganzen) der

ersten zukommende Quantität der andern, und daraus (nach 6tens oder 9tens) die suchende Quantität.

Sind die correspondirenden Größen des bekannten und gegebenen Falles verschiedener Benennung, so muß man sie hiezu vorher auf einerlei Benennung bringen. Die praktische Regel, nach welcher man bei dergleichen 3 gegebenen benannten Zahlen eine 4te finden kann, nennt man die Regel=Detri (Regula de tribus terminis) und unterscheidet daher, je nach dem Verhältniß, in denen solche Zahlen stehen, die gerade und verkehrte Regel=Detri.

Anmerkung.

Das Verfahren nach der Regel=Detri ist in §. 147. gezeigt.

Sechster Abschnitt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 39.

Erklärungen:

1tens, Wenn eine Zahl nach §. 33, 8tens, das Maaß einer andern ist, so sagt man, diese andere ist durch erste Zahl theilbar.

2tens, Wenn zwey oder mehrere Zahlen einerlei relatives Maaß haben, so heißt dieses ihr gemeines oder gemeinschaftliches Maaß.

3tens, Da Primzahlen unter sich nach §. 7, 9tens, kein gemeines Maaß haben, so heißt dasjenige gemeine Maaß, welches zwey oder mehrere Zahlen durch Division mit ihm auf Primzahlen unter sich bringt, ihr größtes gemeines Maaß.

4tens, Jede durch 2 theilbare Zahl heißt eine gerade, jede andere eine ungerade Zahl.

Zusaetze:

1tens, Jede Zahl ist das größte Maaß von sich selbst, und die kleinste Zahl, wovon alle ihre Factoren, so wie, wenn solche lauter Primzahlen sind, deren Produkte zugleich Maaße sind. Sind diese Factoren lauter Primzahlen, so sagt man, es sind die kleinsten Factoren der Zahl (ihres Produktes), und es geben also solche, sämmtliche Maaße der Zahl; sind sie es aber nicht, so muß man, um die kleinsten Factoren zu erhalten, statt jedem zusammengesetzten Factor, dessen in Primzahlen ausgedrückten Factoren setzen.

2tens, Das Produkt aus Primzahlen unter sich, ist die kleinste Zahl, wovon alle diese Primzahlen und deren Produkte Maaße sind.

3tens, Das Produkt aus Primzahlen unter sich mit einer jeden Zahl, ist die kleinste Zahl, wovon alle Produkte dieser Primzahlen unter sich, mit dieser Zahl enthalten sind; z. B. (2.3).12=72 ist die kleinste Zahl, wovon (2.12) und (3.12) Maaße sind.

4tens, Ist eine Zahl durch zwey oder mehrere Primzahlen unter sich theilbar, so ist sie auch durch deren Produkt theilbar.

5tens, Ist eine Zahl durch zwey oder mehrere andere zugleich (als Maaß) bestimmt, so ist es ebensoviel, als wenn sie durch deren Produkt bestimmt ist.

§. 40.

Lehrsaetze:

1tens, Wenn eine Zahl das Maaß einer andern ist, so ist sie auch das Maaß eines jeden Produktes dieser andern Zahl, (nach §. 16, 10tens, c); z. B. da 4 durch 2 theilbar ist, so ist auch jedes Produkt von 4 durch 2 theilbar.

Zusatz:

Jedes Produkt einer geraden Zahl ist wieder eine

gerade Zahl, und das Produkt, so aus lauter ungeraden Zahlen entsteht, ist wieder eine ungerade Zahl.

2tens, Der Dividend ist das Produkt des Divisors mit dem Quotienten (nach §. 31), daher ist das Maaß des Divisors oder des Quotienten (nach 1tens) auch ein Maaß des Dividenden; z. B. da 24:6=4, und 3 ein Maaß von 6, und 2 ein Maaß von 4 ist, so ist sowohl 3, als auch 2 ein Maaß von 24.

3tens, Dividirt man Zahlen durch ihr, den meisten (zweyen oder mehreren) von ihnen gemeines Maaß, so ist das Produkt dieses Maaßes mit allen erhaltenen Quotienten und durch dieses Maaß nicht theilbaren (gegebenen) Zahlen, durch jede dieser gegebenen Zahlen theilbar, denn jede Zahl ist von sich und von dem Produkte ihres Divisors mit ihrem Quotienten, folglich auch jede der gegebenen Zahlen von dem ganzen Produkte (nach 1tens) ein Maaß.

4tens, Sind alle diese nach 3tens, erhaltenen Quotienten und nicht getheilten gegebenen Zahlen, Primzahlen unter sich, so ist deren Produkt mit dem gebrauchten Maaße (nach Zus. 3 des §. 39) die kleinste Zahl, wovon alle gegebene Zahlen, d. i. die Dividenden Maaße sind; z. B. 7, 24, und 36, nach 3tens, durch 12 dividirt, giebt 2 und 3 zu Quotienten, und da diese Quotienten und die durch diesen Divisor nicht theilbare gegebene Zahl 7, Primzahlen unter sich sind, so ist auch (12.3.2.7)=504 die kleinste Zahl, wovon 7, 24, und 36, Maaße sind.

5tens, Jede Zahl ist nach §. 16, 10tens, d) dem Produkte der bei ihr nach und nach gebrauchten Divisoren in den letzten Quotienten gleich, werden daher die nach 3tens erhaltenen Quotienten und nicht getheilten gegebenen Zahlen wieder durch ein, zweyen oder mehreren von ihnen gemeines Maaß dividirt, und dieses so lange fortgesetzt, bis alle letzte Quotienten und die, mit anderen Dividenden oder diesen Quotienten kein gemeines Maaß habenden Dividenden Primzahlen unter sich sind, so ist

(nach 4^tens) das Produkt aller gebrauchten Divisoren mit diesen letzten Quotienten und Dividenden, die kleinste Zahl, wovon alle gegebene Zahlen, d. i. die Dividenden Maaße sind.

§. 41.

Aufgabe:

Die kleinste Zahl zu finden, wovon zwey oder mehrere Zahlen, z. B. 5, 14, 24, und 36, Maaße sind.

Auflösung:

Man schreibe die Zahlen neben einander, mache einen Strich darunter, suche ein, den meisten (zweyen oder mehreren) dieser Zahlen gemeines Maaß, schreibe solches hinten an den Strich, dividire damit die Zahlen, wovon es das Maaß ist, und schreibe die dadurch erhaltenden Quotienten und die dadurch nicht theilbaren Zahlen unter den Strich; setze dieses Verfahren so lange fort, bis die unter den Strich kommenden Zahlen kein gemeines Maaß mehr haben, und multiplicire dann solche und die hinter den Strich stehenden Zahlen mit einander, so erhält man nach §. 40, 5^tens, die gesuchte Zahl, die man daher auch das kleinste theilbare Produkt oder die Generalzahl der gegebenen Zahlen nennt, d. i.

5, 14, 24, 36, : 2;
5, 7, 12, 18, : 6;
5, 7, 2, 3,

also 2.6.5.7.2.3=2520 die verlangte Zahl.

Zusaetze:

1^tens, Das nach obiger Auflösung angegebene Verfahren wird kürzer, wenn man jede gegebene Zahl, die in einer andern dergleichen als Maaß enthalten ist, wegläßt, und mit dem, zweyen oder mehreren Zahlen gemeinschaftlichen Maaße diese Zahlen bis auf eine dividirt, und zuletzt alle auf diese Art gebliebenen Zahlen, ohne ihre Maaße, multiplicirt; z. B. bei den Zahlen 9, 3,

6, 27, 17 und 51 sagt man »9 und 3 ist in 27, und 17 in 51 enthalten, daher 9, 3, und 17 nicht zu berücksichtigen; 6, 27, und 51 haben 3 zum gemeinschaftlichen Maaße, daher zwey davon durch 3 dividirt, giebt 2, 9, und 51, und daher ist die Generalzahl =2.9.51=918;« und bei den Zahlen 13, 6, 3, 39, und 4 sagt man »13 und 3 sind schon in 39 enthalten, werden also nicht berücksichtiget; von 6 und 39 eine durch ihr gemeines Maaß 3, und von 6 und 4 eine durch ihr gemeines Maaß 2 dividirt, ergiebt sich 4.39=156 als Generalzahl.«

2tens, Eine Zahl ist daher durch mehrere gegebene Zahlen theilbar, wenn sie durch deren Generalzahl theilbar ist, (nach 1ten Zus. des §. 39).

Anmerkung.

Durch die Buchstabenrechnung ist in §. 30. diejenige Regel dargestellet, welche die Merkmahle angiebt, durch welches Ziffer eine Zahl theilbar seyn kann, und aus der am Ende beigehefteten Tabelle sind die Factoren oder Maaße aller Zahlen von 1 bis 1000 zu ersehen.

§. 42.

Lehrsatz:

Das gemeine Maaß des Divisors und des bleibenden Restes ist auch ein Maaß des Dividends, denn z. B. da 62:8=(56+ den Rest 6):8 ist, so ist, da 2 ein Maaß von 8, und 8 ein Maaß von 56 ist, auch 2 ein Maaß von 56, (nach §. 40, 2tens); und da 2 ein Maaß von 6 ist, so ist es (nach §. 15, 6tens, c) ein Maaß von der ganzen Summe (56+6) oder von den Dividenden 62.

Zusätze:

1tens, Von zwey Zahlen kann das gemeinschaftliche Maaß (nach Zus. 1. des §. 39) nicht größer, als die kleinere dieser Zahlen seyn.

2tens, Ist von zwey Zahlen die kleinere nicht ein Maaß der größeren, so kann auch ihr gemeinschaftliches Maaß nicht

größer als der Rest seyn, der übrig bleibt, wenn man die größere durch die kleinere dividirt (nach Lehrs. und Zus. 1); und ist dieser Rest ein Maaß des Divisors oder der kleineren Zahl, so ist er auch ein Maaß des Dividenden oder der größeren Zahl, folglich das größte gemeine Maaß für beyde Zahlen.

§. 43.

Aufgabe:

Das größte gemeinschaftliche Maaß für zwey oder mehrere Zahlen zu suchen.

Auflösung:

Man dividire sie alle und so nach und nach alle dadurch erhaltenden Quotienten, durch ihr nach Anmerkung des §. 41 gefunden werdendes gemeines Maaß (gemeinschaftlichen Factor), bis die letzten Quotienten Primzahlen unter sich sind, so ist das Produkt aller hiebei gebrauchten Maaße (nach §. 38, 4^{tens}) ihr gemeines Maaß und also (nach der 3ten Erkl. des §. 39) das verlangte Maaß. Oder bei nur zwey Zahlen:

1^{tens}, Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; ist nun solche ohne Rest in der größern enthalten, so ist sie nach §. 42, Zus. 1) das verlangte Maaß.

2^{tens}, Bleibt aber ein Rest, so dividire man durch ihn die kleinere Zahl (den vorigen Divisor); ist nun dieser Rest in derselben ohne neuen Rest enthalten, so ist er nach 2ten Zus. des §. 42. das verlangte Maaß.

3^{tens}, Bleibt aber wieder ein Rest, so dividire man mit ihm den vorigen Divisor (vorigen Rest), und dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man auf einen Rest kommt, der den vorigen ohne neuen Rest theilet, so ist dann dieser Rest das verlangte Maaß, denn er ist es von sich (dem zuletzt gebliebenen Reste) und dem vorigen Divisor, folglich auch (nach Lehrs. §. 42.) von dem vorigen Dividenden, und so ist dieß rückwärts fortwäh-

rend der Fall, daher er das größte gemeinschaftliche Maaß von den beyden gegebenen Zahlen ist.

4tens, Kommt man zuletzt auf einen Rest = 1, so waren die gegebenen Zahlen schon Primzahlen unter sich und haben daher kein solches verlangtes Maaß.

Beispiel:

Es soll von 4096 und 524 das größte gemeine Maaß gefunden werden.

Auflösung:

1) 4096:524=7+..; 2) 524:428=1+..; 3) 428:96=4+..;

3668 — *428 | 428 — *96 | 384 — *44

4) 96:44=2+..; 5) 44:8=5+..; 6) 8:4=2;

88 — *8 | 40 — *4 | 8 — *

also ist 4 das verlangte Maaß.

Oder bei mehr als zwey Zahlen:

Man suche das größte gemeinschaftliche Maaß von zwey der gegebenen Zahlen, suche dann von diesem gefundenen Maaße und der dritten gegebenen Zahl wieder das größte gemeinschaftliche Maaß, bestimme dann wieder von diesem letzten gefundenen Maaße und der vierten gegebenen Zahl das größte gemeinschaftliche Maaß, und fahre so fort, bis man mit allen gegebenen Zahlen durch ist, so ist das hiernach zuletzt erhaltende größte gemeinschaftliche Maaß das verlangte Maaß. Z. B. Es soll von 3654, 3828, 4089 und 4495 das größte gemeinschaftliche Maaß gefunden werden.

Auflösung: 1) von 3654 und 3828 ist dieses = 174;
2) = 174 = 4089 = = = 87;
3) = 87 = 4495 = = = 29;
also ist 29 das gesuchte Maaß.

Zusatz:

Zerlegt man das größte gemeinschaftliche Maaß nach 1ten Zus. des §. 39. in seine kleinsten Factoren, so erhält man wieder alle gemeinschaftlichen Maaße.

Siebenter Abschnitt.

Von den Brüchen oder gebrochenen Zahlen.

§. 44.

Erklärungen:

1tens, Bei einem Bruche (§. 7, 13tens) nennt man die Zahl ober dem Strich, welche die vorhandenen Theile zählet, den Zähler, und die Zahl unter dem Strich, welche die gemachten gleichen Theile benennet, den Nenner des Bruches.

2tens, Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so heißt der Bruch (nach §. 7, 11tens) ein ächter, außerdem ein unächter Bruch.

Zusätze:

1tens, Wenn man Zahlen nach ihren absoluten Einheiten, z. B. die Zahl 2 und 3 gegen einander betrachtet, so hat die eine zwey, die andere drey Einheiten, es hat daher 2, zwey Theile von der in drey gleiche Theile getheilten Zahl 3; d. i. (nach §. 7, 12tens), 2 ist $\frac{2}{3}$ von 3, und 3 ist $\frac{3}{2}$ von 2; also $2 = \frac{2}{3}$ von 3, und $3 = \frac{3}{2}$ von 2.

2tens, Eine Zahl gegen eine andere auf diese Art betrachten, heißt nach §. 7, 5tens, und 10tens, aber nichts anderes, als ihre Einheiten durch die andere als Maaß (Divisor) bestimmen, d. i. den Quotienten der erstern dividirt durch die andere, angeben; z. B. so 2 gegen 3 betrachten, heißt 2 durch 3 dividiren, und so 3 gegen 2 betrachten, heißt 3 durch 2 dividiren und den Quotienten angeben.

3tens, Der Bruch ist daher einem Quotienten gleich, dessen Dividend der Zähler, und dessen Divisor der Nenner des Bruches ist, welches auch aus §. 7, 12tens u. §. 16, 11tens, a) dadurch hervorgeht, daß z. B.

$$\frac{2}{3} = 2 \,.\, (1 : 3) = 2 : 3;$$

4tens, Jeden Bruch kann man wie einen Quotienten und jeden Quotienten Bruchweise schreiben, und es wird z. B.

bei §. 32. der Quotient $2 + (2:3)$ Bruchweise durch $2\frac{2}{3}$ geschrieben; auch kann man jede ganze Zahl als einen Bruch mit dem Nenner 1 schreiben und annehmen, (nach §. 33, 4^{tens}), z. B. $12 = \frac{12}{1}$, sie daher in einen Bruch mit beliebigem Nenner verwandeln, wenn man zu diesem Nenner den Zähler dadurch bestimmt, daß man die Zahl mit dem Nenner multiplicirt, denn nach §. 16, 7^{tens}, ist z. B. $12=(12.13):13 = \frac{12.13}{13}$;

5^{tens}, Es gilt daher Alles, was von dem Quotienten in §. 46. gesagt wurde, auch von dem Bruche, mit Rücksichtnahme des übigen 3ten Zusatzes.

6^{tens}, Wird eine Größe in 2 Theile getheilet, so nennt man einen solchen Theil einen halben, es wird daher der Nenner 2 durch h a l b e, jeder andere aber nach §. 7, 12^{tens}, ausgesprochen.

7^{tens}, Der Nenner eines unbenannten Bruches ist (nach §. 7, 12^{tens}) die Benennung der durch den Zähler angegeben werdenden Theile der absoluten Einheit, es sind daher Brüche gleichartig, wenn sie einerlei Nenner haben.

8^{tens} Von zwey Brüchen ist der eine größer,

a) wenn bei gleichen Nennern dessen Zähler größer ist, (nach 7^{tens}); d. i. z. B. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

b) wenn bei gleichen Zählern dessen Nenner kleiner ist, denn je weniger Theile von der Einheit gemacht werden, desto größer werden solche Theile, daher auch gleichviel solche größere Theile mehr betragen, als dergleichen kleinere; d. i. $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$;

9^{tens}, Jeder unächte Bruch läßt sich in eine ganze oder in eine g e m i s c h t e Z a h l, d. i. in eine ganze Zahl verbunden mit einem ächten Bruche verwandeln, denn z. B. $\frac{1153}{360} = 1153:360 = 3\frac{73}{360}$; und umgekehrt, denn $3\frac{73}{360} = 3 + \frac{73}{360} = \frac{3.360}{360} + \frac{73}{360}$ (nach 4^{tens},) $= 1080\ 360^{tel} + 73\ 360^{tel}$, also $= 1153\ 360^{tel}$, d. i. $= \frac{1153}{360}$; (In §. 49 folgt näherer Beweis.)

10^{tens}, Wenn mit einer gemischten Zahl eine der vier Rech-

nungsarten vorgenommen werden soll, so hat man daher Alles zu beobachten, was von einer Summe bisher hiebei gesagt wurde, oder man hat die gemischte Zahl hiezu nach vorigem Zusatz in einen unächten Bruch zu verwandeln.

§. 45.

Zusatze:

1tens, Nach §. 16, 11tens, e) wird ein Bruch in seinem Werthe nicht verändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt.

2tens, Wenn daher bei Brüchen die Nenner nicht gleich sind, so kann man sie dadurch gleich machen, d. i. die Brüche auf einerlei Benennung bringen, wenn man Zähler und Nenner mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt, wodurch die Nenner derselben gleich werden, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{8}$ sollen auf gleiche Nenner gebracht werden; man bringe daher entweder den Nenner 4 auf den Nenner 8, oder den Nenner 8 auf den Nenner 4, oder auch beyde auf einen Nenner, wovon sie Maaße sind, z. B. auf 16; d. i. setze $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, oder $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, oder $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ und $\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$.

3tens, Ein Bruch wird daher auf einen kleineren Nenner oder auf eine kleinere Benennung gebracht, wenn man Zähler und Nenner durch eine Zahl dividirt, welche in beyden als Factor enthalten, also ihr gemeines Maaß ist; so ist z. B. $\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$;

4tens, Wenn Zähler und Nenner keinen Factor mehr gemein haben, und also beyde Primzahlen unter sich sind, so ist der Bruch (nach 3tens) auf seiner kleinsten Benennung.

5tens, Man bringt daher einen Bruch auf seine kleinste Benennung, wenn man Zähler und Nenner (nach §. 39, Erkl. 3) durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß (nach §. 43.) dividirt.

6tens, Mehrere Brüche werden daher auf die gleiche kleinste Benennung gebracht, wenn man die Brüche nach 5tens. einzeln auf ihre kleinste Benennung bringt, sodann nach §. 41. für deren Nenner die kleinste Zahl suchet, wovon solche Maaße sind, und nun jeden Bruch nach 2tens, auf die Benennung dieser Zahl, welche man den Generalnenner dieser Brüche nennt, bringt.

7tens, Von allen Brüchen kann man nach §. 44, 8tens, a) angeben, welches der größere ist, wenn man sie nach 2tens, auf einerlei Nenner bringt, und es ist z. B. bei $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$, d. i. bei $\frac{14}{35}$ und $\frac{15}{35}$, der zweyte der größere.

8tens, Ist bei Brüchen die Summe des Zählers und Nenners gleich, so ist derjenige größer, der den größern Zähler und den kleinern Nenner hat; d. i. z. B. $\frac{4}{7} > \frac{3}{8}$; $\frac{9}{19} > \frac{5}{23}$ und ist bei ächten Brüchen die Differenz des Zählers und Nenners gleich, so ist derjenige größer, bei welchem die Zahlen des Zählers und Nenners größer sind; hingegen bei unächten Brüchen ist dies umgekehrt; d. i. z. B. $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$, $\frac{7}{18} > \frac{5}{16}$, hingegen $\frac{8}{5} > \frac{10}{7}$.

§. 46.

Aufgabe:

Mehrere Brüche auf einerlei Nenner zu bringen.

Auflösung:

Man multiplicire den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Produkte aller Nenner der übrigen Brüche.

Beweis:

Dadurch wird der Nenner eines jeden Bruches dem Produkte gleich, so aus sämmtlichen Nennern entsteht, also werden auch alle neue Nenner gleich; und dadurch, daß man den Zähler mit der nemlichen Zahl multiplicirt, wodurch dessen Nenner in den neuen verwandelt wird, wird jeder Bruch in seinem Werthe nicht verändert, (nach §. 45, 1tens und 2tens).

§. 47.

Aufgabe:

Die dem Generalnenner mehrerer Brüche entsprechenden Zähler eines jeden derselben zu finden.

Auflösung:

Da nach §. 45, 6$^{tens}_{"}$, jeder vorige Nenner ein Maaß des Generalnenners ist, so dividire man mit jedem Nenner den Generalnenner und multiplicire mit dem sich dadurch ergebenden Quotienten dessen Zähler.

Beweis:

Der erhaltene Quotient ist diejenige Zahl, womit der Nenner multiplicirt werden muß, um dem Generalnenner zu entsprechen, folglich muß auch dessen Zähler mit dieser Zahl multiplicirt werden, um des Bruches vorigen Werth zu behalten, (nach §. 45, 1$^{tens}_{"}$ und 2$^{tens}_{"}$).

§. 48.

Aufgabe:

Mehrere Brüche auf gleiche kleinste Benennung zu bringen, z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{100}{120}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{80}{100}$.

Auflosung:

1$^{tens}_{"}$, Man bringe zuerst nach §. 45, 5$^{tens}_{"}$, jeden einzelnen Bruch auf seine kleinste Benennung, wenn dieß nicht schon der Fall war. Im gegebenen Beispiel erhält man also dann die Brüche

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5};$$

2$^{tens}_{"}$, Suche von sämmtlichen dadurch erhaltenden Nennern nach §. 41. die kleinste Zahl, wovon sie Maaße sind; also ist hier

$$\begin{array}{r|l} 8, 6, 9, 4, 5, & :4; \\ \hline 2, 6, 9, 1, 5, & :2; \\ \hline 1, 3, 9, 1, 5, & :3; \\ \hline 1, 1, 3, 1, 5, & \end{array}$$

diese Zahl $= 4.2.3.3.5 = 360$ der Generalnenner, (nach §. 45, 6$^{tens}_{"}$), zu welchen man

3tens, für jeden Zähler die entsprechende Zahl nach §. 47. findet, indem man die gegebenen oder nach 1tens, erhaltenen Brüche in eine Reihe unter einander schreibt, darneben noch zwey Reihen durch Linien bildet, ober solche den Generalnenner setzet, dann in die 2te Reihe den Quotienten schreibt, den man erhält, wenn man den Generalnenner durch den Nenner jedes in ersterer Reihe stehenden Bruches dividirt, und in die 3te Reihe das Produkt jedes dieser Quotienten mit dem vorne stehenden Zähler einträgt, und dadurch die neuen Zähler erhält; d. i.

	360	
$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{4}{9}$	40	160
$\frac{3}{4}$	90	270
$\frac{4}{5}$	72	288

also ist $\frac{3}{8} = \frac{135}{360}$;
$\frac{5}{6} = \frac{300}{\cdot}$;
$\frac{4}{9} = \frac{160}{\cdot}$;
$\frac{3}{4} = \frac{270}{\cdot}$;
$\frac{4}{5} = \frac{288}{\cdot}$;

wobei der Punkt statt des Nenners, bedeutet, daß der Nenner der nehmliche, wie der des oberhalb stehenden Bruches ist.

§. 49.

Aufgabe:
Brüche zu addiren.
Auflösung:
Sind deren Nenner noch nicht gleich, so mache man sie nach §. 46 oder §. 48 gleich, addire dann die Zähler und setze unter deren Summe den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.
$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} + \frac{4}{9} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{135+300+160+270+288}{360} = \frac{1153}{360}$
$= 3\frac{73}{360}$, (nach §. 44, 9tens); und sind hiebei gemischte Zahlen, so addire man zuerst die Brüche, dann die ganzen Zahlen, zu welchen man die in der Summe der Brüche enthal-

tenen Ganzen zählt; z. B. $2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{6} = 4\frac{5}{12}$; denn für die Nenner $\frac{4, 2, 3}{2, 1, 3}$: 2 ist 2.2.3 = 12 der Generalnenner, also

12

$2\frac{3}{4}$	3	9
$\frac{1}{2}$	6	6
$1\frac{1}{6}$	2	2
Summe 3 +		$\frac{17}{12} = 3 + 1\frac{5}{12} = 4\frac{5}{12}$.

Beweis:

Es werden dadurch alle von den Brüchen ausgedrückt werdenden gleichartigen Theile, folglich sie selbst addirt.

§. 50.

Aufgabe:

Von einem Bruche einen andern abzuziehen.

Auflosung:

Man bringe die Brüche, wenn sie es noch nicht sind, auf einerlei Nenner, nach §. 46 oder §. 48, und subtrahire dann vom Zähler des Minuends jenen des Subtrahends, und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.

$\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$; und $\frac{1}{4} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8} - \frac{5}{8} = -(\frac{5}{8} - \frac{2}{8}) = -\frac{3}{8}$; (nach §. 18, Zus. 5.);

Beweis:

Dadurch werden alle Theile des Subtrahends, folglich er selbst vom Minuend abgezogen.

Zusaetze:

1tens. Ist hiebei eine ganze oder gemischte Zahl, so verwandle man zu der vorzunehmenden Subtraction dieselbe in einen unächten Bruch (nach §. 44, Zus. 4); oder man ziehe zuerst die Brüche von einander ab, wozu man, wenn der des Minuends kleiner ist, ihm eine von seinen Ganzen geborgte Einheit als Bruch von gleichem Nen-

ner vorher addirt, und dann ziehe man die Ganzen, nachdem man zuvor das Geborgte entweder nach Anm. im §. 23. bei dem Minuend notirt oder es nach §. 23, Zus. 1. zu denen Ganzen des Subtrahends gezählt hat, ab; z. B. $7 - \frac{3}{4} = 6\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 6\frac{1}{4}$, dann $5 - 2\frac{2}{3} = 4\frac{3}{3} - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$ und $3\frac{1}{4} - 1\frac{5}{6} = 1\frac{5}{12}$, denn

12		
$+ 3\frac{1}{4}$	3	+ 12 }
		+ 3 }
$- 1\frac{5}{6}$	2	− 10
1	+	$1\frac{5}{2} = 1\frac{5}{12}$;

oder

12		
$+ 3\frac{1}{4}$	3	12 }
		+ 5 }
$- 1\frac{5}{6}$	2	− 10
1		
1	+	$\frac{5}{12} = 1\frac{5}{12}$

2tens, Besteht der Minuend oder Subtrahend oder Beyde aus mehreren Posten, so wird ganz nach vorigem Zusatz und dem ersten Zusatz des §. 23. verfahren; z. B. von $4\frac{5}{8}$ und $2\frac{1}{5}$ abgezogen $3\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$ und $1\frac{3}{4}$, giebt $\frac{8}{15}$; denn

120		
$+ 4\frac{5}{8}$	15	+ 240, weil 1 Ganzes addirt,
$+ 2\frac{1}{5}$	24	+ 75 hier nicht hinreicht, um die Summe des Subtrahends von der des
$- 3\frac{2}{3}$	40	− 80 Minuends abziehen zu
$- 1\frac{3}{4}$	30	− 90 können und 2 Ganze
$- \frac{7}{8}$	15	− 105 $= \frac{240}{120}$ sind.
− 2		
giebt *		$\frac{64}{120} = \frac{8}{15}$.

§. 51.

Aufgabe:

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, z. B. $\frac{1}{4}$ mit 2.

Auflocsung:

Man multiplicire entweder damit den Zähler und lasse den Nenner unverändert, oder man dividire damit den Nenner und lasse den Zähler unverändert; d. i. $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; (nach §. 16, 11^{tens}_{n}, a)).

Zusaetze:

1^{tens}_{n}, Letzteres ist, wenn der Nenner durch den Multiplicator theilbar ist, vortheilhafter, weil man dadurch das Resultat in einem Bruche von kleinerer Benennung erhält (§. 56, 1^{tens}_{n}); ebendeswegen dividire man, wenn dieses nicht der Fall ist, jedoch Beyde einerlei Maaß haben, sie vor der Multiplication durch dieses ihr gemeinschaftliches Maaß; d. i. z. B. $\frac{3}{14} . 4 = \frac{3}{7} . 2$ (nach §. 16, 11^{tens}_{n}, e)) $= \frac{6}{7}$.

2^{tens}_{n}, Ist der Multiplicand eine gemischte Zahl, so multiplicire man zuerst deren Bruch nach vorigem Zusatz und dann deren Ganze, zu welch letzterem Produkt man die in dem ersteren enthaltenen Ganzen zählt; d. i. z. B. $2\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3}{4} \cdot 5 + 2 . 5$, (nach §. 44, 10^{tens}_{n}) und §. 15, 6^{tens}_{n}, c) $= 3\frac{3}{4} + 10 = 13\frac{3}{4}$.

§. 52.

Aufgabe:

Brüche, welche sich auf relative Einheiten ausdrückende Zahlen beziehen, in solche Zahlen, welche sich auf die absolute Einheit (§. 7, 12^{tens}_{n}) beziehen, zu verwandeln, z. B. $\frac{2}{3}$ von 3, und $\frac{1}{4}$ von 3.

Aufloesung:

Man multiplicire die Brüche mit der Zahl, worauf sie sich beziehen, so beziehen sich die dadurch entstehenden Zahlen (ganze oder Brüche) auf die absolute Einheit 1; d. i. $\frac{2}{3}$ von 3 ist $= 2$; und $\frac{1}{4}$ von 3 ist $= \frac{3}{4}$.

Beweis:

Nach §. 44, Zus. 1^{tens}_{n} u. 2^{tens}_{n}, ist ein solcher Bruch einem Dividenden gleich, der sich auf die absolute Einheit bezieht, wovon er (der Bruch) der Quotient, und die Zahl, worauf er sich bezieht, der Divisor ist, daher nach §. 16, 3^{tens}_{n}, die Auflösung richtig ist.

Oder:

Es zeigt nach §. 7, 12^{tens}_{n}, ein dergleichen Bruch an, daß man die Zahl, worauf er sich beziehet, durch den Nenner theilen, und einen solchen Theil so oft nehmen soll, als es der Zähler angiebt; d. i. $\frac{2}{3}$ von 3 ist $=$ (3:3) . 2 $=$ 2; und $\frac{3}{4}$ von 3 ist $=$ (3:4) . 1 $=$ $\frac{3}{4}$;

Zusatz:

Einen Theil, z. B. den 4ten Theil einer Größe bestimmen, ist daher ebensoviel, als die Größe so oft nehmen, als es ein Bruch angiebt, dessen Zähler 1 und dessen Nenner die Zahl ist, welche diesen Theil benennt, also bei diesem Beispiel ebensoviel, als sie mit $\frac{1}{4}$ multipliciren; und den $\frac{2}{3}$ Theil von einer Größe bestimmen, heißt auch nichts anderes, als den 3ten Theil dieser Größe 2 mal nehmen, sie also mit $\frac{2}{3}$ multipliciren. Jede durch einen Bruch bezeichnete Quantität einer Größe kann man also als ein Vielfaches derselben in den Rechnungsoperationen behandeln.

§. 53.

Aufgabe:

Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Aufloesung:

Man dividire entweder den Zähler dadurch und lasse den Nenner unverändert, oder man multiplicire den Nenner damit und lasse den Zähler unverändert; (nach §. 16, 11^{tens}_{n}, b); z. B. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$;

Zusaetze:

1^{tens}_{n}, Ersteres ist, wenn der Divisor ein Maaß des Zählers ist, vortheilhafter, so wie auch, wenn man vor der Ver-

richtung der verlangten Division durch Multiplication des Nenners, den Divisor und den Zähler durch ihr gemeinschaftliches Maaß dividirt; d. i. z. B. $\frac{8}{13} : 6 = \frac{4}{13} : 3 = \frac{4}{39}$; Beydes aus dem im 1ten Zus. des §. 51 angeführten Grunde.

2tens, Ist der Dividend eine gemischte Zahl, so dividire man zuerst deren Ganze, zähle den hiebei bleibenden Rest zu deren Bruch, und dividire dann diese Summe, so ist die Summe beyder Quotienten der gesuchte Quotient; d. i. z. B. $7\frac{1}{2} : 3 = 2\frac{1}{2}$, denn

$$7 : 3 = 2$$
$$\underline{6}$$
$$1 = \frac{2}{2}$$
$$\underline{+\ \frac{1}{2}}$$
$$\frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}$$

oder man verwandle hiezu die gemischte Zahl in einen Bruch, z. B. $1\frac{2}{5} : 3 = \frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{15}$;

§. 54.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl oder einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire den Multiplicand mit dem Zähler und dividire ihn vor- oder nachher mit dem Nenner des Multiplicators; z. B.

$8 \cdot \frac{3}{4} = (8.3) : 4$ oder $= (8:4) \cdot 3$;
$= 24 : 4$; $= 2 \cdot 3$;

und $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = (\frac{1}{4} \cdot 2) : 5 = \frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$
oder $= (\frac{1}{4} : 5) \cdot 2 = \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{1}{10}$
} nach §. 51 und §. 53.

Beweis:

Mit einem Bruche, z. B. mit $\frac{2}{5}$ multipliciren, heißt mit dem 5ten Theil von 2 multipliciren, welches durch die Auflösung (nach §. 16, 11tens, c) geschiehet.

Zusatz:

Brüche werden überhaupt mit einander multiplicirt, wenn man die Zähler mit einander und ebenso die Nenner mit einander multiplicirt, und kann man hiebei jede ganze und gemischte Zahl nach dem 4ten und 9ten Zus. des §. 44. als einen Bruch ansetzen; d. i. z. B. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{18}{180} = \frac{1}{10}$, und $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, wobei man vorher (nach §. 51 und §. 53) den Zähler eines Bruches und den Nenner eines (desselben oder eines andern) Bruches durch ihr gemeinschaftliches Maaß dividiret; d. i. z. B. $\frac{3}{14} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$; und $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$.

§. 55.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl oder einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren.

Aufloesung:

Man dividire den Dividend durch den Zähler und multiplicire ihn vor- oder nachher durch den Nenner des Divisors, d. i. z. B.

$8 : \frac{2}{3} = (8:2) \cdot 3$ od. $= (8.3) : 2$;

$= 4 \cdot 3$; $= 24 : 2$;

und $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = (\frac{4}{5} : 2) \cdot 3 = \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5}$

oder $= (\frac{4}{5} \cdot 3) : 2 = \frac{12}{5} : 2 = \frac{6}{5}$ } nach §. 51 und §. 53.

Beweis:

Mit einem Bruch, z. B. mit $\frac{2}{3}$ dividiren, heißt mit den 3ten Theil von 2 dividiren, welches durch die Auflößung (nach §. 16, 11tens, d)) geschiehet.

Zusaetze:

1tens, Ein Bruch wird überhaupt durch einen andern dividirt, wenn man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt, oder wenn man ihn mit umgekehrten Divisor nach §. 54 multipliciret, und kann man hiebei jede ganze oder gemischte Zahl nach dem 4ten und 9ten Zusatz des §. 44. als einen Bruch ansetzen; d. ist z. B. $\frac{15}{28} : \frac{5}{7} = \frac{15:5}{28:7} = \frac{3}{4}$; und $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

2tens, Ist bei einer Division der Dividend oder Divisor oder jeder ein Bruch, und man schreibt diese Division Bruchweise an, so erhält man einen gebrochenen Bruch, der also in einen einfachen verwandelt wird, wenn man die Division wirklich verrichtet, und es ist z. B. $\frac{\frac{3}{8}}{2} = \frac{3}{16}$; $\frac{\frac{5}{6}}{4} = \frac{10}{3}$; $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{14}$;

§. 56.

Zusaetze:

1tens, Im Resultate wird ein Bruch in seiner kleinsten Benennung und jeder unächte Bruch als gemischte Zahl nach §. 44, 9tens, ausgedrückt.

2tens, Was von den vier Rechnungsarten mit benannten ganzen Zahlen einerlei Art in vorigen §. §. erwähnt wurde, gilt auch von den benannten gebrochenen Zahlen oder Brüchen, mit der Berücksichtigung, daß zwar (nach §. 44, Zus. 7) ein Bruch schon benannt ist, wenn er sich auf eine, eine relative Einheit ausdrückende Zahl bezieht, aber dann nach §. 52. auf einen unbenannten Bruch gebracht werden kann.

3tens, Ist daher aus der durch einen Bruch ausgedrückten Menge einer Größe und der ihr entsprechenden Quantität einer andern Größe, für eine andere ebenfalls durch einen Bruch ausgedrückten Menge der erstern Größe, die ihr zukommende Quantität der andern zu bestimmen, so bestimme man solche nach §. 38, 11tens, indem man die durch den Bruch ausgedrückte Menge gemäß Zus. des §. 52 wie ein Vielfaches behandelt; z. B. wenn $\frac{2}{3}$ Ellen einer Waare 5 fl. kosten, so kosten $\frac{4}{5}$ Ellen davon 6 fl. denn

$\frac{2}{3}$ Ellen kosten 5 fl.; also nach §. 38, 5tens,

1 = = $(5 : \frac{2}{3})$ fl. $= \frac{15}{2}$ fl., und daher nach §. 30, 4tens,

$\frac{4}{5}$ = = $(\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2})$ fl. $= 6$ fl.

4tens, Wenn ein Bruch durch zwey oder mehrere andere (als Maaß) zugleich bestimmt ist, so ist es (nach 5ten Zus. des §. 39) ebensoviel als wenn er durch deren Produkt bestimmt ist.

Achter Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit benannten Zahlen verschiedener Benennung, welche sich jedoch auf einerlei Benennung bringen lassen.

§. 57.

Aufgabe:

Benannte zusammengehörige ganze Zahlen verschiedener Benennung zu andern von eben solchen Benennungen zu addiren.

Auflösung:

Man setze die gleichartigen Größen unter einander und so neben einander, daß immer nach den Größen höherer Art die der nächst niedern Art, rechts zu stehen kommen, hierauf mache man einen Strich unter die Summanden, addire die ober einander stehenden Größen einerlei Art von der rechten zur linken Hand, nach §. 20, und erhält man hiebei so viele Einheiten, daß sie eine oder mehrere Einheiten der Größe nächst höherer Art ausmachen, so rechne man solche zu der Summe dieser nächst höheren Art; z. B.

14fl.+ 6kr.+3ℋ+1hl.; und 2Ctr.40Pfd.14Lth.2Qt.
3 = +55 = +— =+1 = ; — = 63 = 20 = 3 =

Se. = 18 fl.+ 2kr. — = - = ; Se. = 3Ctr. 4Pfd. 3Lth.1Qt.

Anmerkung.

Die Zeichen (+) werden hiebei gewöhnlich weggelassen.

§. 58.

Aufgabe:

Benannte zusammengehörige ganze Zahlen verschiedener Benennung von anderen eben solcher Benennungen zu subtrahiren.

Auflösung:

Man schreibe den Subtrahend so unter den Minuend, wie es im vorigen §. von denen Summanden gesagt wurde, mache einen Strich darunter, und subtrahire von der rechten zur linken Hand nach §. 23, 5ten Zusatz, wobei man, wenn der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, von der nächst höheren Art eine Einheit borgt und sie mit soviel Einheiten, als sie in der fraglichen niederen Art beträgt, zu dem Minuend zählt, um die Subtraction vollziehen zu können; d. i. z. B.

3 Ctr. 24 Pfd. 4 Lth. — Qt.
1 = 40 = 3 = 3 =
Rest = 1 Ctr. 84 Pfd. — = 1 Qt.

und

22 Jahr 3 Monat 12 Tag 5 Stund
4 = 6 = 20 = 19 =
Rest = 17 Jahr 8 Monat 21 Tag 10 Stund.

§. 59.

Aufgabe:

Mehrere zusammengehörige Größen verschiedenerlei Benennung durch eine Zahl ihrer kleinsten Benennung auszudrücken; z. B. 17 fl. 38 kr. 3 h. 1 hl. durch hl. auszudrücken.

Aufloesung:

Man resolvire nach §. 30. die Größen der höchsten Benennung auf den Ausdruck der Größen der nächst niederen Art, addire hiezu die gegebene Anzahl dieser nächst niederen

Art, und verfahre so fort, bis man die Summe aller Größen in dem verlangten Ausdruck erhält; d. i.

17fl. = (17.60)kr. = 1020kr.
38 = hiezu
1058 = = (1058.4)pf. = 4232pf.
3 = hiezu
4235 = = (4235.2)hl. = 8470hl.
dazu 1 =
Summe = 8471hl.

Oder man resolvire nach §. 30. jede einzelne Größe auf den verlangten Ausdruck und addire dann die erhaltenen Produkte, d. i. 17 fl. + 38 kr. + 3 pf. + 1 hl. = ((17. 480) + (38.8) + (3.4) + 1) hl. = (8160+304+12+1) hl. = 8471 hl.

Zusatz:

Wendet man die erstere Auflösung rückwärts an, so kann man Größen einerlei Benennung, wenn sie gleichartige Größen höherer Art enthalten, auf den Ausdruck von Größen verschiedenerlei Benennung bringen, indem man dieselben (nach §. 38) nach und nach immer auf einen höheren Ausdruck reduzirt, und den dabei bleibenden Rest auf seiner Benennung läßt; d. i. z. B.

8471 hl. = (8471:2) pf. = 4235 pf. = (4235:4) kr. = 1058 kr.

8471 — 4232
1 hl. — 3 pf.

und 1058 kr. = (1058 : 60) fl. = 17 fl.
1020
38 kr.

also 8471 hl. = 17 fl. 38 kr. 3 pf. 1 hl.

§. 60.

Aufgabe:

Mehrere zusammengehörige Größen verschiedenerlei Benennung durch Größen ihrer höchsten Benennung auszudrücken; z. B. 17 fl. 38 kr. 3 pf. 1 hl. durch fl. auszudrücken.

Auflosung:

Man reduzire nach §. 38. die Größe der niedrigsten Benennung auf den Ausdruck der Größe von der nächst höheren Art, addire hiezu die gegebene Anzahl dieser nächst höheren Art, und verfahre so fort, bis man die Summe aller Größen in dem verlangten Ausdruck erhalten hat, d. i.

1hl. = (1:2)pf. = $\frac{1}{2}$pf.

3 = hiezu

$3\frac{1}{2}$ = = ($\frac{7}{2}$:4)kr. = $\frac{7}{8}$kr.

38 = dazu

$38\frac{7}{8}$ = = ($\frac{311}{8}$:60)fl. = $\frac{311}{480}$fl.

hiezu 17 =

Summe = $17\frac{311}{480}$fl.

Oder man reduzire nach §. 38 jede einzelne Größe auf den verlangten Ausdruck und addire die erhaltenen Quotienten, d. i. 17 fl. + 38 kr. + 3 pf. + 1 hl. = (17 + (38:60) + (3:240) + (1:480))fl. = (17 + $\frac{19}{30}$ + $\frac{1}{80}$ + $\frac{1}{480}$)fl. = $17\frac{311}{480}$ fl.

Zusaetze:

1tens, Wendet man die erstere Auflösung rückwärts an, so kann man Größen einerlei Benennung, wenn sie Größen niederer Benennung enthalten, auf den Ausdruck von Größen verschiedenerlei Benennung bringen, indem man den ächten Bruch derselben (nach §. 30) nach und nach immer auf einen niederern Ausdruck resolvirt und die gegebenen und dadurch erhaltenden ganzen Zahlen auf ihrer Benennung läßt; z.B. $17\frac{311}{480}$ fl. = 17 fl. 38 kr. 3 pf. 1 hl.; denn

$\frac{311}{480}$ fl. = = ($\frac{311}{480}$. 60)kr. = = $\frac{311}{8}$ = = 38^{7} kr.

$\frac{7}{8}$ kr. = = ($\frac{7}{8}$. 4) pf. = = $\frac{7}{2}$ = = $3\frac{1}{2}$ pf.

$\frac{1}{2}$ pf. = = ($\frac{1}{2}$. 2) hl. = = 1 hl.

2tens, Größen verschiedenerlei Benennung werden auf den

Ausdruck einer ihrer mittleren Benennung gebracht, wenn man die Größen höherer Benennung nach §. 59, und die der niederern Benennung nach obiger Auflösung auf den verlangten Ausdruck bringt, und dann Beyde zu der in diesem verlangten Ausdruck schon gegebenen Größe addirt; d. i. z. B. 17 fl. + 38 kr. + 3 pf. + 1 hl. = ((17.60) + 38 + (3:4) + (1:8))kr. = $1058\frac{7}{8}$ kr.; und = ((17.240) + (38 . 4) + 3 + (1:2)) pf. = $4235\frac{1}{2}$ pf.

3tens, Größen verschiedenerlei Benennung werden auf den Ausdruck von Größen eben solcher Benennungen, die zwar einerlei Grundmaaß, jedoch gegen einander eine andere Reductionszahl haben, gebracht, wenn man sie auf die Benennung ihres Grundmaaßes bringt, und dann dieses wieder in den verlangten Ausdruck resolvirt und reduzirt; z. B. 6 Zoll Duodezimalmaaß in Dezimalmaaß zu verwandeln, da 1 Zoll Duodezimalmaaß = $\frac{1}{12}$ Fuß und 1 Fuß = 10 Zoll Dezimalmaaß ist. Es ist also

6 Zoll Duodez. = $\frac{1}{2}$ Fuß = 5 Zoll Dezimalmaaß, und 3 Ruthen + 9 Fuß + 5 Zoll + 3 Linien Duodezimalmaaß = $36 + 9 + \frac{5}{12} + \frac{3}{144}$ Fuß = $45\frac{7}{16}$ Fuß = 4 Ruthen + 5 Fuß + 4 Zoll + $3\frac{3}{4}$ Linien Dezimalmaaß.

§. 61.

Aufgabe:

Benannte zusammengehörige Zahlen verschiedener Benennung zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire mit dem Multiplicator, der nach §. 16, 8tens, eine unbenannte Zahl ist, zuerst die Größen der niedrigsten Art, dann die der nächst höheren Art u. s. w. nach §. 30. und addire die, in dem Produkte der vorgehenden

niederen Art enthaltenen Einheiten der nächst höheren Art, zu dem Produkte der Größen dieser nächst höheren Art; z. B.

5 fl. 16 kr. 3 pf.
× 6 =
Produkt = 31 fl. 40 kr. 2 pf.

§. 62.

Aufgabe:

Benannte zusammengehörige Zahlen verschiedenerlei Benennung durch eine Zahl zu dividiren.

Auflösung:

Man dividire zuerst die Zahl der höchsten Art des Dividends nach §. 38, zähle den bleibenden Rest zu der Zahl der nächst niederen Art mit seinen hievon enthaltenden Einheiten, dividire nun ebenso diese Summe der nächst niederen Art des Dividends, und fahre damit so lange fort, bis man mit allen Größen des Dividends durch ist, so erhält man durch die Summe der einzelnen Quotienten den ganzen Quotienten; z. B. 22 Cntr. 46 Pfd. 3 Lth. sollen durch 4 dividirt werden, nun ist:

22 Cntr. : 4 = 5 Cntr.
20
2 Cntr. = 200 Pfd.
46 = dazu
246 Pfd. : 4 = 61 Pfd.
24
*6
4
2 Pfd. = 64 Lth.
3 = dazu
67 Lth. : 4 = $16\frac{3}{4}$ Loth.

also ist der Quotient = 5 Cntr. 61 Pfd. $16\frac{3}{4}$ Loth.

Zusatz;

Soll von mehreren zusammengehörigen benannten Zahlen angegeben werden, welches Vielfache sie von andern der-

gleichen sind, oder welcher Theil diese anderen von den ersteren sind, so bringe man nach §. 59 oder §. 60 dieselben auf eine einzige und gleiche Benennung, und dividire die Zahl der erstern durch die Zahl der letztern, so giebt (nach §. 38, 3tens) der Quotient das verlangte Resultat.

Z. B. soll bestimmt werden, der wievielste Theil 5 fl. 16 kr. 3 pf. von 31 fl. 40 kr. 2 pf. ist, oder, wie viel mal erstere in letzteren enthalten sind, so verwandle man beyde Posten in Größen einer einzigen und gleichen Benennung, und dividire die Zahl der letzteren durch die Zahl der ersteren, so giebt der Quotient 6 das verlangte Resultat an.

§. 63.

Zusatz:

Eben so geschieht die Rechnung mit zusammengehörigen Zahlen verschiedener Benennung, wenn solche als gebrochene gegeben sind (nach §. 56, Zus. 2.).

§. 64.

Aufgabe:

Aus einem Vielfachen oder einem gewissen Theile von verschieden benannten Größen und der ihnen entsprechenden Quantität einer andern Größe, eine Quantität dieser andern Größe zu bestimmen, welche einem anderen Vielfachen oder anderem Theile der ersteren Größen zukommet.

Auflösung:

Man bringe die correspondirenden Größen nach §. 59 oder §. 60 auf eine einzige und gleiche Benennung und verfahre dann nach dem 11ten Zus. des §. 38 und §. 56, 3tens; z. B. soll angegeben werden, wie viel Kreutzer 15 Pfd. 14 Lth. einer Waare kosten, und wie viel Lothe man um 3 fl. 24 kr. davon bekommt, wenn 1 Entr. 16 Pfd. derselben 37 fl. 18 kr. kosten, so setze man:

1tens, 1 Ctr. 16 Pfd. = 116 Pfd. kosten 37 fl. 18 kr. = 2238 kr.; daher

$$1 = = \frac{2238}{116} \text{ kr. und}$$

$$15 \text{ Pfd. } 14 \text{ Lth.} = 15\frac{7}{16} \text{ Pf.} = \left(\frac{247}{16} \cdot \frac{2238}{116}\right) \text{kr.} = 297\frac{777}{928} \text{ k.}$$

2tens, um 37 fl. 18 kr. = $37\frac{3}{10}$ fl. bek. man 1 Ctr. 16 Pfd. = 3712 Lothe.

$$\text{daher um } 1 = = = \left(3712 : \frac{373}{10}\right) \text{Lth.} = \frac{37120}{373} \text{ L.}$$

$$\text{und um } 3 \text{ fl. } 24 \text{ kr.} = 3\frac{2}{5} \text{ fl.} = \left(\frac{17}{5} \cdot \frac{37120}{373}\right) \text{Lthe.} = 338\frac{134}{373} \text{ L.}$$

Neunter Abschnitt.

Von den Dezimalbrüchen.

§. 65.

Erklärung:

Ein Bruch, dessen Nenner eine Zahl ist, welche aus 1 mit angehängten Nullen besteht, also 1 Zehner, 1 Hunderter, u. s. w. ist, heißt ein zehntheiliger oder Dezimalbruch.

Zusaetze:

1tens, Bei dem Zähler eines Dezimalbruches drückt daher jeder Ziffer desselben von der linken zur rechten Hand immer einen zehnmal kleineren Werth aus, so daß bei einem unächten dergleichen Bruche, nach den Ziffern, welche die Ganzen (ganze Zahlen) ausdrücken, das nächste Ziffer Zehntheile, das folgende Hunderttheile u. s. w. bezeichnet; z. B. $\frac{2435}{10} = 24\frac{35}{100} = 24 \text{ Ganze} + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$;

2tens, Man kann daher bei Dezimalbrüchen die Nenner weglassen, wenn man bei den Ziffern des Zählers eines dergleichen unächten Bruches diejenigen, welche die Ganzen bezeichnen, von jenen, so die Dezimalen, d. i. Zehntheile u. s. w. ausdrücken, durch ein Comma trennt,

und die nach der im 1ten Zusatze angegebenen Reihenfolge bei einem dergleichen ächten Bruche fehlenden Ganze, Zehntheile u. s. w. durch Nullen bezeichnet; so ist z. B. $\frac{2435}{100} = 24,35$; $\frac{35}{100} = 0,35$; $\frac{5}{100} = 0,05$.

3tens, Unter einem nach den 2ten Zus. bezeichneten zehntheiligen Bruche versteht man im strengeren Sinne einen Dezimalbruch, dessen Werth also nicht verändert wird, wenn man vorne oder hinten Nullen beisetzet; und man nennt jeden andern Bruch gegen diesen einen gemeinen Bruch.

Anmerkung.

Da das Comma nach Ziffern gesetzet, worauf noch drey Ziffern folgen, auch den Ausdruck »Tausende« bedeuten kann, so nehme man, um Irrthum zu vermeiden, statt drey Dezimalen vier, d. i. setze statt der fehlenden vierten ein 0 bei.

§. 66.

Aufgabe:

Dezimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren.

Auflösung:

Man setze dieselben so unter einander, daß die Comma derselben genau unter einander zu stehen kommen, denke sich statt der gegen einander fehlenden Ziffern Nullen, addire und subtrahire sie dann wie ganze Zahlen und setze in der Summe oder dem Reste das Comma gleichfalls unter die vorigen Comma; z. B.

	4,567		
	0,234	und	1,6543
	10,9092		0,948645
Summe =	15,7102;	Rest =	0,705655;

Beweis:

Es werden dadurch (nach Zus. 2. des §. 65) lauter gleichartige Theile derselben, daher sie selbst addirt oder subtrahirt.

Zusaetze:

1tens, Jeder ganzen Zahl kann man Nullen als Dezimalen beisetzen, sie also als einen Dezimalbruch betrachten.

2tens, Wenn man die Subtraction eines Dezimalbruches durch Addition seiner arithmetischen Ergänzung nach 4ten Zus. des §. 23 verrichten will, so bestimme man diese arithm. Erg. dadurch, daß man den Dezimalbruch von der nächst höheren Einheit seiner Ganzen abzieht; d. i. setze z. B. A. E. 0,0045 = 9,9955 und daher 1,3421 — 0,0045 = (1,3421+9,9955) — 10;

§. 67.

Aufgabe:

Einen Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl oder mit einem Dezimalbruch zu multipliciren.

Auflosung:

Man multiplicire beyde Faktoren, als ganze Zahlen betrachtet, d. i. ohne Rücksichtnahme der Comma, und setze im Produkte das Comma von der rechten zur linken Hand nach soviel Ziffern, als beyde Faktoren zusammen Dezimalen haben; z. B.

2,467	2,467	9,456	0,023
3	0,3	2,4	0,012
7,401	0,7401	37824	46
		18912	23
		22,6944;	0,000276

Beweis:

Die Richtigkeit der Auflösung geht daraus hervor, wenn man die Dezimalbrüche auf die Gestalt gewöhnlicher Brüche bringt, d. i. das Comma wegläßt und den Nenner dazu setzet, und dann nach der Multiplication wieder den Nenner nach §. 65., Zus. 2. wegläßt, sie also wieder in Dezimalbrüche verwandelt.

Zusatz:

Ist ein Faktor eine ganze Zahl 1 mit angehängten Nullen, so darf man daher nur das Comma bei dem andern Faktor um so viele Stellen rechts rücken, als die Anzahl dieser Nullen beträgt, um die verlangte Multiplication zu verrichten, wobei man die hiezu fehlenden Ziffern durch Nullen ersetzet; z. B. $24{,}35 \times 10 = 243{,}5$; $0{,}45 \times 10 = 4{,}5$; und $0{,}5 \times 100 = 50$.

§. 68.

Aufgabe:

Einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung:

Man dividire damit die Ganzen des Dezimalbruches, mache hinter den dadurch erhaltenden Quotienten ein Comma als Unterscheidungszeichen der nachfolgenden Dezimalen, setze nun zu dem von denen Ganzen gebliebenen Reste das nächste Ziffer, dividire in die dadurch erhaltende Zahl, und schreibe den sich ergebenden Quotienten hinter den schon angeschriebenen Quotienten der Ganzen, und fahre nun auf diese Art fort, bis entweder kein Rest mehr bleibt, wobey man, wenn der Divisor kein Maaß des Dividenden ist, dem Bruche noch so viele Nullen beisetzet, bis der Divisor ein Maaß desselben wird, oder bis man dadurch so viele Dezimalen des Quotienten bestimmt hat, daß der Quotient nur um einen sehr geringen Theil des wirklichen Quotienten unterschieden ist, also ihm gleich angenommen werden kann; und hat man hiebei nicht alle Dezimalen des Quotienten bestimmt, so wird solches durch die nach denen bestimmten zu setzende Sternchen angedeutet. Bei Fortsetzung dieser Division braucht man dem Dezimalbruche nicht selbst Nullen anzuhängen, sondern man hängt dem jedesmaligen Rest ein Null bei oder streicht, wenn der Divisor Nullen hat, statt dem Reste ein Null anzuhängen, immer ein Null im Divisor weg; (nach §. 33, 7^{tens}).

z. B. 43,256 : 2 = 21,628; 3,56 : 4 = 0,89; 0,356 : 4 = 0,089;
0,002184 : 31200 = 0,00000007; denn
0 Ganze : 31200 = 0,
0
*0 : 31200 = 0;
0
*0 : 31200 = 0;
0
*2 : 31200 = 0;
0
21 : 31200 = 0;
0
218 : 31200 = 0;
0
2184 : 31200 = 0;
0
2184 : 3120 = 0;
0
2184 : 312 = 7;
2184
—

Beweis:

Es werden hierdurch alle einzelnen Theile des Dezimalbruches (nach §. 15, 6^tens, c)) dividirt und die dadurch sich ergebenden Quotienten addirt, daher der in den Quotienten gesetzte Dezimalbruch der richtige Quotient ist.

Zusaetze:

1^tens, Jede ganze Zahl kann hiernach gemäß 1ten Zus. des §. 66 durch eine andere dividirt werden; z. B. 3 : 4 = 3,00 : 4 = 0,75; 10 : 3 = 3,33 * *

2^tens, Bei einem hiernach ins Unendliche fortgehenden Quotienten müssen, sobald der nemliche Rest, welcher bei der dem Dividend zur Fortsetzung der Division beigesetzten ersten 0, wiederum bleibt, auch die in demselben während dieser Periode erhaltenen Ziffern, welche man

daher dessen Periode nennt, wiederkehren; z. B. bei 0,23:7=0,032857142857142** ist 285714 die Periode des unendlichen Quotienten.

3tens, Ist der Divisor eine ganze Zahl aus 1 mit angehängten Nullen, so darf man nur im Dividend das Comma um so viele Ziffern links rücken, als die Zahl Nullen hat, und die hiezu fehlenden Ziffern durch Nullen ersetzen, d. i. z. B. 234,23:100=2,3423; 2,5:100=0,025;

4tens, Ist bei der Multiplication ein Faktor ein gemeiner Bruch, so wird mit Rücksichtnahme der Lehre der Multiplication und Division mit Dezimalbrüchen, ganz, wie es in §. 51 und §. 54 gesagt, verfahren; d. i.

$0{,}5 \cdot \frac{3}{4} = (0{,}5 \cdot 3) : 4$; oder $= (0{,}5 : 4) \cdot 3$;

$= 1{,}5 : 4$; $= 0{,}125 \cdot 3$;

$= 0{,}375$; $= 0{,}375$;

und $\frac{3}{4} \cdot 0{,}5 = \frac{3 \cdot 0{,}5}{4}$; od. $= \frac{3}{4:0{,}5}$ (nach §. 70) $= \frac{3}{40:5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$;

od. nach §. 69.

$= \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$;

oder man verwandle hiezu nach §. 69 den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch, d. i. $\frac{3}{4} \cdot 0{,}5 = 0{,}75 \cdot 0{,}5$

$= 0{,}375$;

§. 69.

Aufgabe:

Jeden Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Auflösung:

Man dividire die Zähler durch den Nenner nach 1ten Zus. des §. 68, so wird dadurch der Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt, welcher den vorigen ganz gleich ist, wenn der Zähler als Dezimalbruch durch den Nenner theilbar ist, außerdem ihm aber um so näher kommt, je mehr man Dezimalen bestimmt, d. i. je mehr man Nullen dem Zähler angehängt hat; z. B. $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$; $3\frac{2}{3}$

$= 3 + \frac{2}{3} = 3 + (2:3) = 3 + 0{,}66** = 3{,}66**$

Beweis:

Geht aus §. 44, Zus. 3, deutlich hervor.

Zusaetze:

1tens, Man kann hiernach gemeine und Dezimalbrüche addiren, von einander subtrahiren, so wie mit einander multipliciren, und durch einander dividiren.

2tens, Jeden Bruch kann man in einen Bruch von beliebigem Nenner verwandeln, der dem gegebenen Bruche ganz gleich ist oder ihn doch wenigstens sehr nahe kommt, wenn man den Zähler (nach Uebigem) durch den Nenner des Bruches dividirt und den erhaltenen Dezimalbruch durch den verlangten Nenner multiplicirt, welches Produkt den Zähler zu diesem Nenner giebt; z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{3}$ sollen in Brüche mit dem Nenner 13 verwandelt werden, so ist $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{0{,}75 \times 13}{13} = \frac{9{,}75}{13}$ und $\frac{1}{3} = 0{,}333_{**} = \frac{0{,}333_{**} \times 13}{13} = \frac{4{,}33_{**}}{13}$.

§. 70.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl oder einen Dezimalbruch durch einen Dezimalbruch oder auch einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung:

Man mache durch Nullen die Dezimalstellen des Dividends und Divisors gleich, wenn es solche noch nicht sind, und dividire, indem man Beyde wie ganze Zahlen betrachtet, nach Zus. 1 des §. 68; z. B. 222 : 0,03 = 222,00 : 0,03 = 22200 : 3 = 7400; 2,22 : 0,03 = 222 : 3 = 74; 0,24 : 0,12 = 24 : 12 = 2; 2,22 : 0,3 = 222 : 30 = 74; 2,22 : 3 = 222 : 300 = 0,74;

Beweis:

Durch die Gleichstellung der Dezimalstellen werden die Nenner derselben, wenn man solche darunter setzet, gleich, und Brüche von gleichen Nennern werden dividirt, wenn

man ihre Zähler, d. i. die nach der Auflösung erhaltenden Dezimalbrüche als ganze Zahlen genommen, dividirt.

Zusaetze:

1tens, Diese Gleichstellung der Dezimalstellen durch Nullen kann man auch unterlassen, wenn man die Dezimalbrüche als ganze Zahlen dividirt und dann das sich dadurch im Quotienten ergebende Comma um so viele Stellen rechts rücket, als der Divisor mehr Dezimalstellen hatte, ~~oder~~ wenn man es dann um so viele Stellen mehr links rücket, als der Dividend mehr Dezimalstellen hatte.

2tens, Ist bei der Division der Dividend oder Divisor ein gemeiner Bruch, so wird mit Rücksichtnahme der Lehre der Multiplication und Division mit Dezimalbrüchen ganz nach §. 53 und §. 55 verfahren, d. i. z. B. $\frac{3}{x}$:0,5

$= \frac{3:0,5}{4} = \frac{3}{4.0,5}$, also nach obiger Aufl.

$= \frac{30:5}{4}$; $= \frac{3}{2}$; nach §. 67.

$= \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$;

und 0,6 : $\frac{3}{4}$ = (0,6:3) . 4; = (0,6.4) : 3;

= (6:30) . 4; = 2,4 : 3;

= 0,2 . 4; = 24 : 30;

= 0,8; = 0, 8;

oder man verwandle hiezu den gemeinen Bruch nach §. 69 in einen Dezimalbruch.

3tens, Jeder periodische Dezimalbruch läßt sich in einen gemeinen Bruch verwandeln, wenn man ihn durch 1 mit soviel Nullen multiplicirt, als die Periode Ziffern hat, von diesem Produkte ihn selbst abzieht, und aus dem dadurch erhaltenden Vielfachen das Einfache bestimmt, wodurch man den gemeinen Bruch, welcher dem gegebenen Dezimalbruch gleich ist, erhält; z. B.

$0,032857142857 14^{**} = \frac{23}{700}$;

denn 0,032857142857 14* × 1000000 = 32857,142857 14**

hiervon abgezogen . . 0,032857 14**

bleibt das 999999fache = 32857,11; daher

(nach oben) das Einfache = $\frac{3285711}{99999900} = \frac{23}{700}$; (siehe 2ten Zus. des §. 68.)

Zehnter Abschnitt.

Von der Buchstabenrechnung.

A.

Einleitung.

§. 71.

Nutzen der Buchstabenrechnung:

Um das Resultat zu finden, welches aus verschiedenen Umständen uns zur Berechnung einer sich hiernach ändernden Zahl gegeben ist, dient zwar die nach diesen Umständen richtige Anwendung der vier Rechnungsarten mit Ziffern.

Da aber in vielen Fällen diese Umstände gleich sind und nur die gegebene Zahl verschieden ist, so kann man, indem man solche Zahl nach §. 14, $2^{tens}_{\ldots}$, allgemein ausdrücket, das sich nach diesen Umständen berechnende Resultat durch die Buchstabenrechnung finden, welches uns also eine allgemeine Formel giebt, nach welcher man auf die kürzeste Art für eine unter gleichen Umständen gegebene bestimmte Zahl das suchende Resultat erhält, wenn man statt der in der Formel allgemein ausgedrückten Zahl, nun die bestimmte setzet; d. i. die Buchstabenrechnung giebt uns allgemeine Regeln an, wie man bei gegebenen Umständen zu verfahren hat, um eine oder mehrere sich hiernach ändernde gegebene Zahlen zu bestimmen.

Es wird daher Jedem einleuchten, wie wichtig die in diesem Abschnitt gelehrte Buchstabenrechnung ist und Ihn daher zu der auch nicht schwierigen Erlernung derselben ermuntern.

§. 72.

Grundsatze:

1tens, In der Buchstabenrechnung, welche (nach Zus. 2 des §. 14) mit durch Buchstaben ausgedrückten Zahlen nach der Lehre der Zifferrechnung rechnet, gelten daher auch alle in der Zifferrechnung aufgestellten Lehren, und werden solche nur noch allgemeiner durch die Buchstabenrechnung dargestellt.

2tens, Um mit Buchstaben (§. 9, 4tens) rechnen zu können, kann auch in der nemlichen Rechnung der nemliche Buchstabe sich auch nur immer auf ein und dieselbe Zahl beziehen, obgleich man jede Zahl in derselben Rechnung immer für ein und denselben Buchstaben setzen können muß; d. i. z. B. für den Buchstaben a kann man in ein und derselben Rechnung jede Zahl, jedoch durch die ganze Rechnung nur immer einerlei Zahl für a setzen.

§. 73.

Aufgabe:

Die in der Zifferrechnung angegebene Verfahrungsart so auf die Buchstabenrechnung anzuwenden, daß man statt eines Buchstabens eine Zahl (nach §. 72, 2tens) in einer Rechnung setzen kann.

Auflocsung:

Hat man z. B. mehrere durch a bezeichnete Zahlen, z. B. drey 4 zu addiren, so verfährt man zwar wie in der Zahlenrechnung bei Addition gleichartiger Größen, d. i. sind es drey a, so schreibt man es durch 3a und nennt die Zahl 3 den Coeffizienten der Größe (unbestimmten Quantität) a, nimmt aber an, daß $3a = 3 \times a$, und $a = 1 . a = 1a$ ist; d. i. man betrachtet einen Coeffizienten wie einen Factor, läßt das Multiplicationszeichen im Produkte und den Coeffizienten 1 gewöhnlich weg, setzt aber ersteres, sobald man statt der Buchstaben bestimmte Zahlen setzet, wieder an seine Stelle und berücksichtigt

während einer Rechnung den allenfalls weggelassenen Coefficienten 1.

Zusaetze:

1tens, In der Buchstabenrechnung sind daher nur diejenigen Größen oder Zahlen (nach §. 72, 2tens) gleichartig, welche durch einerlei Buchstaben bezeichnet sind.

2tens, Da (nach obiger Aufl.) aa sowohl als ab ein Produkt, folglich eine ganz andere Größe (Quantität) als a ist, so ist auch a mit aa, so wie mit ab ungleichartig.

3tens, Da ab=ba nach §. 16, 1tens, ist, so macht bei mehreren Buchstaben die Versetzung derselben auf die Gleichartigkeit keinen Unterschied. Gewöhnlich werden jedoch die Buchstaben im Produkte nach dem Alphabet und daher nicht ba, sondern ab geschrieben.

4tens, Da es sowohl zu addirende als abzuziehende, d. i. (nach §. 18) sowohl Größen mit dem Zeichen +, als mit dem Zeichen — giebt, so sind auch in der Buchstabenrechnung die 4 Rechnungsarten in Beziehung der Zeichen vorzunehmen; und es wird unter jeder durch einen Buchstaben ohne Zeichen ausgedrückten Größe eine positive verstanden, d. i. a=+a;

5tens, Die mit dem Zeichen + oder — verbundenen Größen nennt man auch eine zusammengesetzte, mehrtheilige oder mehrgliedrige Größe, dagegen die ohne oder mit den Multiplications- oder Divisionszeichen verbundenen Zahlen und Buchstaben eine einfache Größe, weil diese Zeichen nach oben und nach 4ten Zus. des §. 44 weggelassen werden können, und sich solche (nach §. 16, 8tens) nur auf eine einzige Größe (Quantum) beziehen kann.

Anmerkung.

Da in der Buchstabenrechnung sowohl Buchstaben als Zahlen vorkommen, so ist es nöthig, solche gegenseitig deutlich zu schreiben, um z. B. das

Ziffer 1 gegen den Buchstaben i
" 5 " " " " s
" 6 " " " " b
" 9 " " " " q und g
u. s. w.
unterscheiden zu können.

B.

Von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen und Größen.

§. 74.

Lehrsatz:

Gleichartige einfache Größen werden addirt, wenn man 1tens, bei gleichen Zeichen derselben die Summe der Coefficienten der Größe sucht, solcher das nemliche Zeichen vorsetzet und die nemliche Größe, d. i. den nemlichen Buchstaben nachsetzet, z. B.

+2a	−2a
+ a	− a; (nach §. 73 ist a=1a)
Summe = +3a;	Summe = −3a;

denn es sind übereinstimmige Größen, welche bei ihrer Vereinigung einander vermehren und deren Summe sich auf die nemliche Größe mit dem nemlichen Zeichen beziehet.

2tens, Bei ungleichen Zeichen derselben, die kleinere von der größern Größe abziehet und dem Reste das Zeichen der größern giebt, z. B.

+3a	− 3 a
− a	+ a
Summe = +2a;	Summe = − 2 a;

denn es sind nach §. 18 entgegengesetzte Größen, und wenn bei der Vereinigung entgegengesetzter Größen, z. B. bei Vermögen und Schulden, das Vermögen mehr ist, so machen Beyde soviel Vermögen, als dessen Ueberschuß beträgt; und wenn die Schulden mehr be-

tragen, so machen Beyde soviel Schulden, als deren Ueberschuß ausmacht (nach Zus. 2 des §. 18), d. i. wenn bei der Addition positiver und negativer Größen die größere positiv ist, so ist auch die Summe, welche der Ueberschuß dieser positiven Größe, oder ein Uebrigbleiben derselben ist, positiv; und ebenso, wenn die größere negativ ist, ist die Summe (d. i. deren Ueberschuß) auch negativ. Auch gilt dieses von Zahlen, denn nach §. 15, $6^{tens}_{\cdot}$, a) ist $(3+4)+(5+2)=8+6$, d. i. $+4$ und $+2$ addirt, giebt $+6$; und nach §. 15, $7^{tens}_{\cdot\cdot}$ a und b) ist $(4-2)+(5-3)=9-5$, d. i. -2 und -3 addirt, giebt -5; dann nach §. 15, $7^{tens}_{\cdot}$, a) und §. 15, $6^{tens}_{\cdot\cdot}$, b) ist $(5+3)+(6-4)=11+(3-4)=11-1$, (nach Zus. 1 des §. 23), d. i. $+3$ und -4 addirt $=-1$; und $(8+5)+(6-2)=14+3$, d. i. $+5$ und -2 addirt, giebt $+3$.

Zusätze;

$1^{tens}_{\cdot\cdot}$, Gleiche entgegengesetzte Größen heben einander bei der Addition auf, d. i. $+a-a=0$; denn z. B. soviel Schulden als Vermögen giebt 0 Vermögen und 0 Schulden.

$2^{tens}_{\cdot}$, Sind mehrere entgegengesetzte Größen, z. B. $+3a$, $-4a$, $+5a$, $-2a$, zu addiren, so nehme man die positiven, so wie die negativen nach dem Lehrs. $1^{tens}_{\cdot\cdot}$, in eine Summe und addire diese Summen nach dem Lehrs. $2^{tens}_{\cdot\cdot}$, es giebt also bei

$$\begin{array}{llll} +3a & & & \\ -4a & +3a & -4a & \text{daher } +8a \\ +5a \;{}^{1tens}_{\cdot\cdot}, & +5a \;{}^{2tens}_{\cdot\cdot}, & -2a \;{}^{3tens}_{\cdot\cdot}, & -6a \\ -2a & +8a; & -6a; & +2a; \end{array}$$

$+2a$ die verlangte Summe; denn, wenn man Größen addiren soll, ist es einerlei, nach welcher Ordnung man die Theile derselben oder ihre einzelnen Summen nach und nach addirt.

$3^{tens}_{\cdot\cdot}$, Ungleichartige Größen kann man nicht wirklich addiren, ihre Addition aber dadurch, daß man sie nach beliebiger

Ordnung (nach §. 15, 6tens, a) mit dem nemlichen Zeichen zusammenschreibt, andeuten, d. i.

$$\begin{array}{r} +a \\ +b \\ \hline \text{Summe} = +a+b; \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} +a \\ -b \\ \hline +a-b: \end{array}$$

4tens, Stehen daher mehrere Größen mit dem Zeichen + oder — neben einander, so zeigt dieß an, daß sie in der nemlichen Eigenschaft, d. i. mit dem neml. Zeichen, welches sie haben, als zusammengehörige oder zu addirende Größen zu betrachten sind.

5tens, Das Zeichen + wird im Anfange gewöhnlich weggelassen und bei neben einander stehenden entgegengesetzten Größen eine positive vorangesetzt, z. B. statt —a+b wird b—a geschrieben.

6tens, Sind zusammengesetzte Größen zu addiren, so addire man ihre Glieder einzeln nach dem Lehrsatze, denn dadurch werden sie selbst addirt; (nach §. 15, 6tens, a).

Hiezu schreibe man die Summanden so unter einander, daß gleichartige Größen unter einander und die ungleichartigen Größen zuletzt neben hinaus zu stehen kommen; z. B. um zu 4a + 3b — c + df — ab + d zu addiren 4b — f + d — 3a + 5ab — 4df + e, welches (nach §. 17.) dadurch ausgedrückt wird, daß man jeden Summanden in Klammern schließt und zwischen beyde das Additionszeichen (+) setzet, schreibe man solches so an:

$$\begin{array}{r} 4a+3b-c+df-ab+d \\ -3a+4b \quad -4df+5ab+d-f+e \\ \hline \text{ist die Summe} = a+7b-c-3df+4ab+2d-f+e; \end{array}$$

und addire so

7tens, Gleiche entgegengesetzte Größen fallen bei der Addition nach dem 1ten Zus. aus der Rechnung, es ist daher z. B.

$$(3a-2b+c)+(2a+2b-3c)=5a-2c.$$

8tens, Wenn zwischen oder vor, in Klammern eingeschlossenen Größen das Zeichen + stehet, so können die Klammern nebst diesem Zeichen (nach 4tens) weggelassen werden, denn es ist z. B. (4a—2b) + (3c+d)=4a—2b+3c+d, (nach 5tens); und a—b+(—c—d)=a—b—c—d.

9tens, Von einer einfachen Größe kann man gemäß §. 73. einen oder mehrere Buchstaben oder Zahlen als eine Größe und die andern als Coeffizienten betrachten und sie hiernach addiren und subtrahiren; d. i. $ax+bx=(a+b)x$; $ax-3x=(a-3)x$; $a-ca=(1-c)a$; und $3.4+2.4=5.4$; $6.2.3-2.3=(6-1).(2.3)=5.(2.3)$;
$=(6.2-2).3=((6-1).2).3$;
$=(6.3-3).2$;
$6ab-ab=(6-1)ab=(6a-a)b=(6b-b)a$.

Einige Beispiele zur Uebung in der Addition.

1tens, $(3a+4b-c+d)+(2a-b-c+2d)$
$=5a+3b-2c+3d$;

2tens, $(4a-3b+c-g)+(-5a+4b-c-e+3d)$
$=-a+b-g-e+3d=b-a-g-e+3d$; (n. 5ten Zus.)

3tens, $(2b-e+d-5f+4c)+(3b-5c+4d-f-gf+e-h+3d-5f+g-2c+3e-5d)$, d. i.
$3b+e+4d-f-5c-fg-h$
$+3e+3d-5f-2c+g$
$-5d$
$=5b+3e+3d-11f-3c-fg-h+g$;

4tens, $(4a-3c+d-e+3ab)+(3a-4c+2e-4ab+2d-g+2c-3d-g-2a+2ba+4g-6a-3e-ba+5c)$ d. i.
$3a-4c+2d+2e-4ab-g$
$-2a+2c-3d+2ab-g$
$-6a+5c-3e-ab+4g$
$=-a-2e+2g=2g-a-2e$;

§. 75.

Lehrsatz:

Wenn von einer Größe eine andere abgezogen werden soll, so ist es ebensoviel, als wenn man solche (den Subtrahend) mit entgegengesetztem Zeichen zur erstern addiren soll; denn

1tens, von a eine Größe b abziehen, giebt a weniger b, d. i. a −b, und a—b drückt nach dem 4ten Zus. des §. 74 nichts anderes aus, als daß zu a die Größe —b addirt werden soll, so wie auch zu dem Reste

a — b

der Subtrahend + b addirt

den Minuenden a wieder giebt.

2tens, Ebenso wenn von a die Größe — b abgezogen werden soll, so ist es ebensoviel, als wenn zu a die Größe +b addirt werden soll, denn

a =a

o = +b—b; (nach 1ten Zus. des §. 74.), also

a =a+b—b; denn Gleiches zu Gleichem addirt giebt wieder Gleiches. Nun ist auch

—b = —b; folgl.

a—(—b)=a+b; denn Gleiches von Gleichem abgezogen giebt wieder Gleiches, und von —b wieder —b abgezogen, hebt sich auf; so wie auch zu dem Reste

a + b

der Subtrahend — b addirt,

den Minuenden a wieder giebt, welches (nach §. 15, 2tens und 3tens) die Richtigkeit der geschehenen Subtraction beweiset.

Auch geht die Richtigkeit des Lehrsatzes daraus hervor, daß nach §. 15, 6tens, a) z. B. (7+6)—(4+2)=3+6—2, d. i. +2 abziehen ist ebensoviel als —2 addiren, und nach §. 15, 7tens, d) ist z. B. (7+6)—(4—2)=3+6+2, d. i. — 2 abziehen ist ebensoviel als + 2 addiren; so wie Ei-

nem Vermögen nehmen oder ihm soviel Schulden übergeben, dann ebenso Einem Schulden abnehmen oder ihm ebensoviel Vermögen geben, einerlei ist.

§. 76.

Zusätze:

1tens, Hieraus folgt die Regel, daß die Subtraction dadurch geschiehet, wenn man im Subtrahend die Zeichen der Größen ändert und sie dann dem Minuend addirt, wodurch man den verlangten Rest oder die Differenz der Größen erhält.

2tens, Wenn zwischen in Klammern stehenden Größen sich das Zeichen (—) befindet, so zeigt dieß (nach §. 17 und §. 13) an, daß die diesem Zeichen nachstehenden Größen von den vorstehenden abgezogen werden sollen, welches nach 1tens, ebensoviel ist, als wenn die nachfolgenden Größen mit entgegengesetzten Zeichen zu ersteren zu addiren wären.

3tens, Will man daher von solchen Größen die Klammern nebst dem Zeichen — zwischen ihnen weglassen, so hat man die, in den diesem Zeichen nachfolgenden Klammern eingeschlossenen Größen in entgegengesetzte nach §. 75 zu verwandeln; d. i. z. B. $(a-2b-c)-(2d+f)=a-2b-c-2d-f$, (nach Zus. 5 des §. 74); und $(a+b)-(-c+d)=a+b+c-d$;

4tens, Besteht der Subtrahend aus mehreren gleichartigen Größen, so verfahre man ebenfalls nach dem 1ten Zus. oder man sammle solche nach Lehrsatz §. 74, in eine Summe und ziehe dann diese Summe nach obigen 1ten Zus. von dem Minuend ab.

Einige Beispiele zur Uebung in der Subtraction.

1^{tens}_{n}, $(a+2b-c+d)-$
$(-2a+3b-d+e)$
$+\ -\ +\ -$; d. i. die Zeichen im Subtrahend geändert und solchen mit diesen geänderten Zeichen addirt,
$= 3a-b-c+2d-e$;

2^{tens}_{n}, $(2a+ab-de+3c-6f+15d)-$
$(2a-ab+6de-4e-6f+4d-3c+g)$
$-\ +\ -\ +\ +\ -\ +\ -$; (Zuf. 5 des §. 74. nicht zu vergessen.)
$= 2ab-7de+7e+11d+3c-g$;

3^{tens}_{n}, $(4b-d+6e+f-3c)-$
$(5b-3d+6e+f+2c-g+a$
$+d-e+f-6c-2a$
$-4d-3e+4c)$
$5b-6d+2e+2f-g-a$ = der Summe des Subtrahends, welche nach üben 4^{tens}_{n}, zu subtrahiren.
$-\ +\ -\ -\ +\ +$
$= -b+5d+4e-f-3c+g+a = 5d-b+4e-f-3c+g+a$;

C.

Von der Multiplication und Division ganzer Zahlen und Größen.

§. 77.

Lehrsaetze:

1^{tens}_{n}, Ein Produkt wird nach §. 16, 10^{tens}_{n}, a und b) durch ein anderes multiplicirt, wenn man beliebige Factoren des ersten mit beliebigen Factoren des andern multiplicirt. Da nun, wenn die Buchstaben Coeffizienten bei sich haben, Beyde als Factoren (nach §. 73) zu betrach-

ten sind, so folgt daraus die Regel, daß man bei der Multiplication der einfachen Größen, die Coeffizienten derselben mit einander multiplicirt und neben die dadurch erhaltende Zahl den oder die Buchstaben (nach Zus. 3 des §. 73) der beyden Produkte oder einfachen Größen schreibt, wobei man nicht zu vergessen hat, daß der Coeffizient, wenn er bei einem Buchstaben fehlt, nach §. 73, =1 ist; z. B. $2a \times 3 = 6a$; $4ab \times c = 4abc$; $3a \times 4b = 12ab$;

2tens, Haben die Factoren Zeichen bei sich, so zeigt das Zeichen (+) bei dem Multiplicator an, daß der Multiplicand mit seinem habenden Zeichen so oft genommen werden soll, als es der Multiplicator angiebt, und das Zeichen (—) bei demselben bedeutet, daß der Multiplicand mit seinem entgegengesetzten Zeichen so oft genommen werden soll, als es der Multiplicator angiebt; d. i.

$+a \times +m = +am$; $+a \times -m = -am$;
$-a \times +m = -am$; $-a \times -m = +am$;

Nach §. 72 drücken die Buchstaben unbestimmte Zahlen aus, was daher von den Zeichen der Factoren bei Zahlen gilt, gilt auch von Buchstaben. Nun ist nach §. 15, 6tens, c und d) $(5+6) \times (3+4) = (15+18)+20+(4.6)$, d. i. +6 mit +4 multiplicirt, giebt +(4.6); dann nach §. 15, 6tens, c) und §. 15, 7tens, f) ist $(5+6) \times (4-2) = (20+24) - (10+(2.6)) = 44-10-(2.6)$, nach §. 15, 6tens, a), d. i. $+6.-2 = -(2.6)$, also auch $-2.+6 = -(2.6)$; und nach §. 15, 7tens, e und f) ist $(7-5) \times (4-3) = (28-20) - (21-(3.5))$ und nach §. 15, 7tens, c) $= 8-21+(3.5)$, d. i. —3 mit —5 multiplicirt, giebt +(3.5); folgl. ist der Lehrsatz richtig.

Zusatz:

Es geben daher gleiche Zeichen der Factoren, im Produkte +, ungleiche —;

3tens, Eine zusammengesetzte Größe wird mit einer einfachen multiplicirt, wenn alle Glieder der ersten damit multi=

plicirt, und die Produkte mit ihren dadurch erhaltenden Zeichen zusammenschreibt, (nach §. 15); d. i. z. B.

$$(4a+3b-5c)\times 2d = 8ad+6bd-10cd;$$

4tens, Eine zusammengesetzte Größe wird mit einer dergleichen anderen (nach §. 15) multiplicirt, wenn man mit jeder Größe, d. i. jedem Gliede, des Multiplicators alle Theile oder Glieder des Multiplicands nach 3tens multiplicirt, und am Ende alle Produkte, d. i. die dadurch erhaltenden zusammengesetzten Größen nach Zus. 6 des §. 74 addirt.

Anmerkung.

Man bemühe sich auch, ein Produkt in seine Factoren zu zerlegen, d. i. aus ihm wieder seine Factoren herauszufinden, weil dieß nach §. 45, 3tens und 5tens zur Verkleinerung der Brüche nöthig ist und auch außerdem, wie später gezeigt werden wird, öfters vielen Vortheil gewährt.

I.) $(a+2b-3c)\times d = ad+2bd-3cd$; II.) $(2a-b+2c)\times 3e = 6ae-3be+6ce$;

III.) $(4c-d+f)\times -2g = -8cg+2dg-2fg = 2dg-8cg-2fg$; IV.) $(a+b)\times(c-1) = ac+bc-a-b$;

V.) $(2a-3b+3c)\times(a-b) = (2aa-3ab+3ac)+(-2ab+3bb-3bc) = 2aa-5ab+3ac+3bb-3bc$;

VI.) $(4a-3b+4c-g)\times(2b-a) \equiv 8ab-6bb+8bc-2bg-4aa+3ab-4ac+ag$

$= 11ab-6bb+8bc-2bg-4aa-4ac+ag$;

VII.) $(5a+2b-3c)\times(4c-a+2b) = 20ac+8bc-12cc-5aa-2ab+3ac+10ab+4bb-6bc$

$= 23ac+2bc-12cc-5aa+8ab+4bb$;

Anmerkung.

Es ist einerlei, ob man die mit jedem Gliede des Multiplicators erhaltenen Produkte als Summanden in Klammern schreibt, wie im Beispiel V, oder ob man sie, wie im Beispiel VI, ohne weitere Berücksichtigung neben einander schreibt, (nach Zus. 8. des §. 74). Will man nun diese Summanden addiren, so braucht man sie, nicht erst, wie in den Beispielen der Addition gezeigt, unter einander zu setzen, sondern man schreibt deren Summe gleich dadurch an, daß man die Glieder nach der neml. Ordnung, jedoch addirt mit den weiters vorkommenden ihnen gleichartigen Gliedern hinsetzt und die dadurch schon addirten Glieder, welche man sich durch Vorstriche, wie im Beispiel VII. bezeichnen kann, wegläßt.

§. 78.

Lehrsatz:

Dividiren heißt nach §. 31. denjenigen Quotienten finden, welcher mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden wieder giebt, daher

1^{tens}, man erhält den Quotienten zweyer einfachen Größen, wenn man (nach §. 77, 1^{tens}) den Coeffizienten des Dividends durch den des Divisors dividirt und gleiche Buchstaben in beyden gegenseitig wegstreicht; d. i. $6a:3=2a$; $6a:2a=3$; $4abc:c=4ab$; $4abc:4a=bc$; $12ab:4b=3a$; $a:a=1a:1a=1$.

2^{tens}, Haben der Dividend und Divisor Zeichen bei sich, so geben nach §. 77, 2^{tens}, Zus., gleiche Zeichen derselben im Quotienten +, ungleiche aber —;

3^{tens}, Eine zusammengesetzte Größe wird (nach §. 15, 6^{tens}, c)) durch eine einfache dividirt, wenn man alle Größen oder Glieder des Dividends durch den Divisor nach 1^{tens}, dividirt und die erhaltenen einzelnen Quotienten mit ihrem ihnen nach 2^{tens}, zukommenden Zeichen addirt; und ist hiebei eine Größe durch den Divisor nicht theilbar, so drücke man blos die verlangte Division so lange, bis die Lehre von den Brüchen gelehret, nach §. 17, aus; d. i. z. B. $(4ab+c):2a=2b+(c:2a)$;

4^{tens}, Ist eine zusammengesetzte Größe durch eine andere dergleichen zu dividiren, so sehe man, wie oft (nach 1^{tens} und 2^{tens}) ein beliebiger Theil oder Glied des Divisors in einem beliebigen Gliede des Dividends enthalten ist, und nehme den dieß angebenden Quotienten als einen Theil oder Glied des suchenden Quotienten, ziehe daher das Produkt dieses schon gefundenen Gliedes des Quotienten mit dem Divisor von dem Dividenden ab, dividire (nach 3^{tens}) den erhaltenden Rest aufs Neue nach diesem angegebenen Verfahren, bestimme dadurch ein weiteres Glied des Quotienten und setze dieses so lange fort, bis kein Rest mehr bleibet, welches der Fall ist,

wenn der Dividend durch den Divisor theilbar ist. Ist aber der Dividend nicht durch den Divisor theilbar, so setze man die Division blos so lange fort, bis ein Rest bleibt, welcher keinen Quotienten in ganzen Größen mehr giebt, und drücke es nach §. 17, in dem Quotienten aus, daß dieser Rest dividirt durch den Divisor noch zu dem ganzen Quotienten gehört.

Beweis:

Die Richtigkeit des Lehrsatzes geht aus §. 16, 10^{tens} „ deutlich hervor.

Zusaetze:

1^{tens} „ Zur Bestimmung eines Gliedes des Quotienten, wähle man solche Glieder des Divisors und Dividenden, daß das Produkt des dadurch erhaltenden Gliedes des Quotienten mit dem Divisor, möglichst gleichartige und gleiche Glieder mit dem Dividenden giebt, wodurch man den ganzen Quotienten am schnellsten erhält und nicht erst nöthig hat, die außerdem erhaltenden gleichartigen Glieder dieses Quotienten zu addiren. Die Vergleichung des vor dieser Addition mit dem nach derselben erhaltenden Quotienten, zeigt es, (wie solches am nachfolgenden 3ten Beispiel zu ersehen ist) am deutlichsten, wo man gefehlt hat. Sind in einem Gliede des Dividenden die Buchstaben eines Gliedes des Divisors mehrfach enthalten (d. i. sind die Erstern, Potenzen der Letztern), so wähle man diese Glieder zuerst zur Bestimmung der Glieder des Quotienten, und ordne überhaupt die Glieder des Dividenden und Divisors so, daß dieselben ähnlich in Beziehung der Buchstaben zu- und abnehmen.

2^{tens} „ Die nach 3^{tens} „ angegebene Division kann man auch nach der nach 4^{tens} „ beschriebenen Verfahrungsart verrichten.

Einige Beispiele zur Uebung in der Division.

I.) (ad+2bd—3cd) : d=a+2b—3c; denn wenn man gemäß Zus. 2, nach Lehrs. 4^{tens}, verfährt, so ist ad:a=d, und a.d=ad, also

ad . . . . abgezogen, bleibt der

—

Rest=+2bd—3cd; Nun ist +2bd:d=+2b, und +2b.d =+2bd, also

+2bd . . . abgezogen, bleibt der

—

Rest =—3cd; und —3cd: d =—3c, und —3cd.d =—3cd, also

—3cd abgezogen, bleibt Nichts, daher ist

\+ a+2b—3c der gesuchte Quotient.

*

II.) (4cf—2fg—4cd+2dg—8cg+4gg):(f—d—2g) =4c—2g; denn es ist 4cf:f=4c, folgl. das erste Glied des Quotienten =4c, mit welchem der Divisor multiplicirt und das Produkt = von dem Dividenden abgezogen wird, wo übrig bleibt. Nun ist —2fg:f=—2g der 2te Theil des Quotienten, mit welchem der Divisor multiplicirt, und das Produkt = wieder abgezogen wird,

4cf	—4cd	—8cg
—	+	+
	—2fg	+2dg	+4gg
	—2fg	+2dg	+4gg
	+	—	—

wodurch sonach, da kein Rest bleibt, alle Glieder des Quotienten gefunden sind.

Staatliche Bibliothek Bamberg

III.) (8ab + 4bb + 23ac — 12cc + 2bc — 5aa) : (5a + 2b — 3c);

Da -5aa:5a = -a, so ist —a das erste Glied des Quotienten,

— 2ab + 3ac — 5aa
\+ — +

10ab + 4bb + 20ac — 12cc + 2bc;

und weil 10ab:2b = 5a, so ist + 5a das zweite Glied desselben,

10ab — 15ac + 25aa
— + —

4bb + 35ac — 12cc + 2bc — 25aa; also 4bb:2b = +2b das dritte Glied

4bb — 6bc + 10ab
— + —

35ac — 12cc + 8bc — 25aa — 10ab; daher das vierte Glied

= — 12cc : -3c = +4c;

20ac — 12cc + 8bc
— + —

15ac — 25aa — 10ab; und das 5te

= 15ac:-3c = —5a;

15ac — 25aa — 10ab
— + +

demnach ist der Quotient = —a + 5a + 2b + 4c — 5a und dieses = 2b + 4c — a; daher hätte man nicht zuerst —5aa:+5a, sondern +4bb:+2b nehmen sollen, um das erste Glied des Quotienten positiv zu erhalten; ebenso hätte man die obige Bestimmung des zweyten Gliedes desselben weglassen sollen, weil sich solches durch das bestimmte fünfte hebt.

§. 79.

Zusatz:

Da die in dem §. 15 und §. 16. angegebenen Lehren, sich §. 17 wohl eigen zu machen sind, so werden sie hier wiederholt und durch folgende allgemeine Beispiele ausgedrückt; man nennt dieses, die bürgerliche Sprache in die algebraische übersetzen, so wie umgekehrt, wenn man aus einem allgemeinen Beispiele ein Resultat schöpft und solches in Worten ausdrückt, so sagt man, man übersetzt die algebraische Sprache in die bürgerliche. Es ist nemlich:

nach §. 15, 6tens,

a; $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$;

$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$;

b; $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$;

$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$;

c; $(a+b)\times c=ac+bc$;

$(a+b):c=(a:c)+(b:c)$;

d; $a\times(b+c)=ab+ac$;

e; $a+b=(a+c)+(b-c)$;

$a+b=(a-d)+(b+d)$;

dann ist nach §. 15, 7tens,

a; $a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b$;

b; $(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c)$;

c; $a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b$;

d; $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$;

e; $(a-b)\times c=ac-bc$;

$(a-b):c=(a:c)-(b:c)$;

f; $a\times(b-c)=ab-ac$;

g; $a-b=(a+c)-(b+c)$;

$a-b=(a-d)-(b-d)$;

ferner ist nach §. 16,

7tens, $a=(a.m):m=(a:m).m$;

10tens, a; $ab.c=ac.b=bc.a$;

b; $a.bc=ab.c=ac.b$;

c; $ab:c=(a:c).b=(b:c).a$;

d; a:bc=(a:b):c=(a:c):b;

e; ab=ac.(b:c);

ab=(a:d).bd;

11tens, a; (a:b).c=ac:b=a:(b:c);

b; (a:b):c=(a:c):b=a:bc;

c; c.(a:b)=ac:b=(c:b).a, und nach 11tens, a)

=a:(b:c), = = = d)

=c:(b:a);

d; c:(b:a)=(c:b).a=ac:b, und nach 11tens, c)

=c.(a:b);

e; a:b=am:bm;

a:b=(a:n):(b:n);

D.

Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen und Größen.

§. 80.

Lehrsatz:

Drückt man den natürlichen Werth eines Ziffers bei den Einern durch a, bei den Zehnern durch b, bei den Hundern durch c, u. s. w. aus, so ist a+10b+100c+1000d+10000e+... ein allgemeiner Ausdruck für jede ganze Zahl. Dividirt man nun diesen allgemeinen Ausdruck durch jedes Ziffer, so kann man aus dem Rest ersehen, wie die Ziffern einer Zahl seyn müssen, wenn die Zahl durch ein Ziffer theilbar ist.

Nun giebt dieser allgemeine Ausdruck

durch 2 dividirt, den Rest a;

= 3 = = = a+b+c+d+e+...;

= 4 = = = a+2b;

= 5 = = = a;

= 6 = = = a+4b+4c+4d+4e+...;

durch 7 dividirt, den Rest $a+3b+2c+6d+4e+\ldots$;
= 8 = = = $a+2b+4c$;
= 9 = = = $a+b+c+d+e+\ldots$;
demnach muß

1tens, das letzte Ziffer (die Einer) einer Zahl durch 2 theilbar oder ein Null seyn, wenn sie selbst durch 2 theilbar seyn soll;

2tens, soll eine Zahl durch 3 theilbar seyn, so muß die Summe ihrer Ziffern (ohne Localwerth) durch 3 theilbar seyn;

3tens, soll eine Zahl durch 4 theilbar seyn, so muß die Summe des letzten und des doppelten vorletzten Ziffers durch 4 theilbar, oder Beyde müssen Nullen oder als Zahl betrachtet durch 4 theilbar seyn;

4tens, soll eine Zahl durch 5 theilbar seyn, so muß das letzte Ziffer 5 oder 0 seyn;

5tens, soll eine Zahl durch 6 theilbar seyn, so muß die Summe des letzten und der 4fachen übrigen Ziffern durch 6 theilbar seyn, welche Regel sehr wenig, so wie noch weniger die bei der Division mit 7 sich hieraus ableitende Regel zur Anwendung nützet;

Ist aber eine Zahl nach Obigem durch 2 und 3 zugleich theilbar, so ist sie auch (nach 4ten Zus. des §. 39) durch 6 theilbar;

6tens, soll eine Zahl durch 8 theilbar seyn, so muß die Summe des letzten, des doppelten vorletzten und des vierfachen vorvorletzten Ziffers durch 8 theilbar, oder diese 3 Ziffern müssen Nullen, oder als Zahl betrachtet, durch 8 theilbar seyn;

7tens, soll eine Zahl durch 9 theilbar seyn, so muß die Summe aller Ziffern durch 9 theilbar seyn.

Zusatz:

Jede gerade Zahl (§. 39, 4tens) läßt sich durch $2m$ und jede ungerade durch $2m+1$ ausdrücken; woraus man ersieht, daß die Summe sowohl, als die Differenz zweyer geraden oder zweyer ungeraden Zahlen gerade ist, und daß die Summe oder Differenz einer geraden und ungeraden Zahl ungerad ist.

§. 81.

Aufgabe:

Das größte gemeine Maaß für zwey oder mehrere Größen zu suchen.

Auflösung:

1tens, Sind es einfache Größen, so suche man nach §. 43 das größte gemeine Maaß ihrer Coeffizienten und setze der dieß angebenden Zahl die gemeinschaftlichen Buchstaben der der Größen bei; d. i. bei 4096ab und 524ad ist das größte gemeine Maaß = 4a, dann bei 4096ad und 524d ist solches = 4d, und bei 4096ab und 524c ist solches = 4.

2tens, Sind es zusammengesetzte Größen, so zerlege man solche in ihre kleinsten Factoren, wo dann das Produkt dieser ihnen gemeinschaftlichen Factoren, ihr gesuchtes größtes gemeines Maaß ist. (nach §. 43.)

Zusatz:

In Beziehung der Zeichen der Größen kann ihr gemeinschaftliches Maaß sowohl positiv als negativ genommen werden.

§. 82.

Aufgabe:

Die kleinste Größe zu finden, wovon mehrere Größen, z. B. a, 2a, ab, cd, bc, 4b, und aa Maaße sind.

Auflösung:

Man verfahre ganz nach §. 41; d. i.

a,	2a,	ab,	cd,	bc,	4b,	aa,	: a;
2,	b,	cd,	bc,	4b,	a		: b;
2,		cd,	c,	4,	a		: c;
2,		d,		4,	a		: 2;
		d,		2,	a,		

es ist also 2.2.a.a.b.c.d = 4aabcd die verlangte kleinste Größe.

E.

Von den gebrochenen Zahlen und Größen.

§. 83.

Lehrsatz:

Ein Bruch bezieht sich nach §. 7, 12tens, wenn es nicht besonders anders ausgedrückt ist, auf die absolute Einheit und es ist daher z. B.

$$\frac{a}{b} = (1:b).a = a:b;$$

d. i. jeder Bruch ist einem Quotienten gleich, dessen Dividend der Zähler, und dessen Divisor der Nenner des Bruches ist.

Zusatze:

1tens, Man kann daher jeden Quotienten Bruchweise schreiben, und es wird bei der Division ein nicht in ganzen Größen erhaltener Quotient durch einen Bruch ausgedrückt, d. i. (§. 78, 3tens) statt $2b+(c:2a)$ wird $2b+\frac{c}{2a}$ geschrieben.

2tens, Hat bei einem Bruch der Zähler oder Nenner Zeichen vor sich, so lassen sich solche wegschaffen und durch ein Zeichen, welches auf den ganzen Bruch Bezug hat, ausdrücken, denn nach der Lehre der Division ist

$$\frac{+a}{b} = \frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b}; \text{ und } - \frac{+a}{+b} = - \frac{a}{b};$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{-a}{+b} = - \frac{a}{b}; \text{ und } - \frac{-a}{b} = + \frac{a}{b};$$

$$\frac{+a}{-b} = - \frac{a}{b}; \text{ und } - \frac{+a}{-b} = + \frac{a}{b};$$

$$\frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b}; \text{ und } - \frac{-a}{-b} = - \frac{a}{b};$$

3tens, Soll ein aus mehreren Gliedern bestehender Bruch entgegengesetzt genommen werden, so darf man also nur die Zeichen seines Zählers ändern; auch lassen sich die Zeichen eines Bruches, seinem Werthe unbeschadet, im Zähler und Nenner zugleich ändern.

4tens, Wenn man die Zähler gleicher Brüche addirt oder subtrahirt und ebenso ihre Nenner, so erhält man dadurch einen ihnen gleichen Bruch, denn ist z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

so muß $c = na$ und $d = nb$ seyn, da $\frac{a}{b}$ aber auch $= \frac{(n \pm 1)a}{(n \pm 1)b}$ (beydes nach 1ten Zus. des §. 45) ist, so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{na \pm a}{nb \pm b} = \frac{c \pm a}{d \pm b}$; z. B. $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \frac{12 \pm 3}{16 \pm 4}$;

§. 84.

Aufgabe:

Einen Bruch auf eine kleinere Benennung zu bringen, z. B. $\frac{2ac}{4ab}$;

Auflösung:

Man dividire Zähler und Nenner durch einen oder mehrere ihrer gemeinschaftlichen Factoren (nach §. 45, 3tens) d. i.

$$\frac{2ac}{4ab} = \frac{ac}{2ab} = \frac{2c}{4b} = \frac{c}{2b};$$

Zusatz:

Auf eine einfachere Gestalt lassen sich auch öfters Brüche bringen, wenn man Zähler und Nenner mit einer mehrtheiligen Größe multiplicirt, und es ist z. B.

$\frac{aa+ax+xx}{aaaa+aaax+aaxx+axxx+xxxx}$, wenn man Zähler und Nenner mit $a - x$ multiplicirt, $= \frac{aaa-xxx}{aaaaa-xxxxx}$, wodurch auch manchmal bedeutender Vortheil erlangt wird.

§. 85.

Aufgabe:

Einen Bruch auf die kleinste Benennung zu bringen.

Auflösung:

Man dividire (nach §. 45, 5tens) Zähler und Nenner durch ihr größtes nach §. 81 gefundenes gemeines Maaß.

§. 86.

Aufgabe:

Mehrere Brüche auf gleiche Benennung zu bringen.

Auflösung:

Man multiplicire (nach §. 46) den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Produkte aller Nenner der übrigen Brüche; d. i. z. B. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; verwandeln sich in $\frac{adf}{bdf}$; $\frac{bcf}{bdf}$; $\frac{bde}{bdf}$.

§. 87.

Aufgabe:

Mehrere Brüche auf gleiche kleinste Benennung zu bringen.

Auflösung:

Man verfahre wie bei §. 48 und bestimme hiebei die kleinste Größe, wovon sämmtliche Nenner der erhaltenen einzelnen Brüche kleinster Benennung Maaße sind, nach §. 82.

§. 88.

Aufgabe:

Brüche zu addiren.

Auflösung:

Sind deren Nenner noch nicht gleich, so mache man sie nach §. 86 oder §. 87 gleich, addire dann die dadurch erhaltenden Zähler und setze unter deren Summe den gemeinschaftlichen Nenner; z. B. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$; dann $\frac{2}{7}b + \frac{3}{7}b = \frac{5}{7}b$; $c + \frac{2}{3}c = \frac{4}{3}c$; $2{,}3d + 4d = 6{,}3d$; und $\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}a = \frac{8}{12}a + \frac{9}{12}a = \frac{17}{12}a$; $\frac{2}{5}\ \frac{a}{b} + \frac{3}{10}\ \frac{c}{d} = \frac{4}{10}\ \frac{ad}{bd} + \frac{3}{10}\ \frac{bc}{bd} = \frac{4ad}{10bd} + \frac{3bc}{10bd} = \frac{4ad+3bc}{10bd}$, (u. §. 92);

§. 89.

Aufgabe:

Von einem Bruch einen andern abzuziehen.

Auflösung:

Man addire nach §. 88 den Subtrahend mit entgegengesetztem Zeichen dem Minuend; z. B. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$; und $\frac{a}{b} - \frac{-c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$; dann $\frac{2}{7}b - \frac{1}{5}b = \frac{3}{35}b$; und $c - \frac{2}{3}c = \frac{1}{3}c$; $c - 0{,}24c = 0{,}76c$;

Zusatz:

Eine ganze Zahl oder Größe wird zu einem Bruche addirt oder davon subtrahirt, und so umgekehrt, wenn man sie (nach §. 44, $4^{tens}_{"}$) als einen Bruch betrachtet, d. i. z. B. $a = \frac{a}{1}$ und $2b = \frac{2}{1}b = \frac{2b}{1}$ setzet.

§. 90.

Aufgabe:

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl oder Größe zu multipliciren oder zu dividiren.

Auflösung:

Man verfahre nach §. 51 und §. 53 und bestimme die Zeichen aus §. 77. $2^{tens}_{"}$, Zus., §. 78. $2^{tens}_{"}$, und aus Zus. 2 des §. 83; d. i. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b:c}$; $\frac{2}{3}a = \frac{2a}{3}$, $\frac{1}{4}b = \frac{b}{4}$; und $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc}$;

Zusaetze:

$1^{tens}_{"}$, Der Anfänger wird wohl thun, wenn er um zu addiren und zu subtrahiren

$\frac{2}{3}a$ und $\frac{1}{4}b$,

hingegen um zu multipliciren und zu dividiren

$\frac{2a}{3}$ und $\frac{b}{4}$

schreibt.

$2^{tens}_{"}$, Ein Bruch wird in eine ganze Zahl, welche gleich dem Zähler ist, verwandelt, wenn man ihn mit dem Nenner multiplicirt; d. i. $\frac{a}{b} \cdot b = a$;

§. 91.

Aufgabe:

Einen sich nicht auf die absolute Einheit beziehenden Bruch, z. B. $\frac{a}{b}$ von c, in einem sich auf dieselbe beziehenden zu verwandeln.

Auflösung:

Man verfahre nach §. 52; d. i.

$$\frac{a}{b} \text{ von } c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b};$$

§. 92.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl oder einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire den Multiplicand mit dem Zähler und dividire ihn vor- oder nachher mit dem Nenner des Multiplicators; z. B. $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} = (a:d)\,c$; und $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a:d}{b:c} = \frac{a}{bd:c} = \frac{ac:d}{b}$, (nach §. 90); dann $2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$ $\frac{4}{10} \cdot \frac{ad}{bd} = \frac{4ad}{10bd} = \frac{2a}{5b}$; und $\frac{x}{6} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{6b}$;

Zusaetze:

1tens, Ein Bruch mit einem ihm gleichen umgekehrten multiplicirt, giebt 1 zum Produkte, d. i. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$;

2tens, Bei der Addition der durch die Multiplication mehrerer Größen erhaltenen Produkte, werden die dabei vorkommenden Brüche zugleich unter gleiche kleinste Benennung gebracht.

§. 93.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl oder einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren.

Auflösung:

Man multiplicire den Dividend mit dem Nenner und dividire ihn vor- oder nachher mit dem Zähler des Divisors,

z. B. $a : \frac{c}{d} = (a : c) \cdot d = (ad) : c$; und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$

$\frac{ad}{bc} = \frac{a:c}{b:d} = \frac{a}{bc:d} = \frac{ad:c}{b}$; (nach §. 90).

Zusaetze:

1tens, Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch, dessen Zähler dieser Zahl gleich ist, dividirt, so erhält man den Nenner des Bruches zum Quotienten; d.i. $a : \frac{a}{b} = b$;

2tens, Ein Bruch durch einen ihm gleichen dividirt, giebt 1 zum Quotienten, d. i. $\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = 1$.

3tens, Kommen bei den vier Rechnungsarten zusammengesetzter Größen Brüche vor, so wird daher mit Rücksichtnahme der über die Brüche vorgetragenen Lehren ganz so, wie es bei zusammengesetzten ganzen Zahlen und Größen zu geschehen hat, verfahren, der Coeffizient des Resultates aber, wenn er ein unächter Bruch ist, als solcher in kleinster Benennung und nicht, wie in der Zifferrechnung geschiehet, als eine gemischte Zahl angegeben, weil solches die Berechnung des Resultats, wenn man statt der Buchstaben Zahlen setzet, erleichtert.

§. 94.

Aufgabe:

Eine zusammengesetzte Größe mit Brüchen durch eine andere dergleichen zu dividiren.

Aufloesung:

Man verfahre mit Rücksichtnahme der bisherigen Lehren von den Brüchen, ganz nach §. 78; ist jedoch der gegebene Divisor kein Factor des Dividenden, so kann man die Division hiernach ins Unendliche fortsetzen. Zum Beispiel

$$\frac{2ac+bc-2cc-12dd}{ab}+\frac{4bd+20acd-8cd+2ab}{aa}+\frac{3ad+5bcc-5abc-3cd}{bb}+\frac{3ad-bb}{ac}-5b-1):\left(\frac{2c-b}{a}+\frac{3d}{b}-5c\right)$$

giebt zum 1ten Theil des Quotienten, $\frac{2ac}{ab}:\frac{2c}{a}=\frac{a}{b}$; also das Produkt mit dem Divisor =

$$\begin{array}{llll} \frac{2ac}{ab} & +\frac{3ad}{bb} & -\frac{5ac}{b} & -1, \text{ abgezogen, bleibt} \\ - & - & + & + \end{array}$$

$$\frac{bc-2cc-12dd}{ab}+\frac{4bd+20acd-8cd+2ab}{aa}+\frac{5bcc-3cd}{bb}+\frac{3ad-bb}{ac}-5b$$

; dieser Rest wieder und zwar $\frac{-2cc}{ab}:\frac{2c}{a}=-\frac{c}{b}=$ dem 2ten Theil des Quotienten, dessen Produkt mit dem Divisor =

$$\begin{array}{llll} \frac{bc}{ab}-\frac{2cc}{ab} & - & +\frac{5cc}{b}-\frac{3cd}{bb} & = \text{ abgezogen, bleibt Rest} \\ - \quad + & & - \quad + & \end{array}$$

$$-\frac{12dd}{ab}+\frac{4bd+20acd-8cd+2ab}{aa}+\frac{3ad-bb}{ac}-5b$$

; folgl. der 3te Theil des Quotienten $-\frac{8cd}{aa}:\frac{2c}{a}=-\frac{4d}{a}$; und als dessen Produkt mit dem Divisor, abgezogen,

$$\begin{array}{llll} -\frac{12dd}{ab} & +\frac{4bd}{aa} & +\frac{20cd}{a} & -\frac{8cd}{aa} \\ + & - & - & + \end{array}$$

bleibt $\frac{2ab}{aa}+\frac{3ad-bb}{ac}-5b$ zum Reste, demnach der letzte Theil des Quotienten $=\frac{2ab}{aa}:\frac{2c}{a}=\frac{b}{c}$ ist, welcher mit dem Divisor multiplicirt, das Produkt

$$\begin{array}{llll} \frac{2ab}{aa} & +\frac{3d}{c} & -\frac{bb}{ac} & -5b \\ - & - & + & + \end{array}$$

giebt, also den Dividenden erschöpft, und demnach die Summe des Quotienten $=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}-\frac{4d}{a}+\frac{b}{c}=\frac{a-c}{b}-\frac{4d}{a}+\frac{b}{c}$ ist.

Anmerkungen.

1tens. Der Anfänger wird bei Divisions-Beispielen wohl thun, wenn er bei einem aus mehreren Summanden bestehenden Bruch, solchen in seine einzelnen Summanden in kleinster Benennung zerlegt.

2tens. Hiermit wäre nun die Lehre der Veränderungen der Größen an und für sich geschlossen, es bleibt aber noch zu untersuchen, wie bei den verschieden vorkommenden obwaltenden Verhältnissen sich die Größen gegenseitig verändern, und wie diese Veränderung möglichst bequem durch Zeichen auszudrücken, und die sich dadurch ergebende Quantität zu finden ist.

Dieses geschieht nun mit Hülfe der Buchstabenrechnung in den nachfolgenden Abschnitten.

III.

Von der Erzeugung der Potenzen, Ausziehung der Wurzeln, und den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

Erster Abschnitt.

Von der Erzeugung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln im Allgemeinen.

§. 95.

Erklärungen:

1tens, Eine Potenz oder Dignität ist ein Produkt aus 1 in lauter gleiche Factoren, z. B. 1.a.a.a, welches, da 1 bei der Multiplication keine Aenderung macht = a.a.a ist. Bei einer Potenz ist daher der gleiche Factor die Hauptgröße und solcher zur Bezeichnung derselben alleine nöthig, so ist z. B. a.a.a eine Potenz von a.

2tens, Die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Grad oder Exponent der Potenz, welchen man oben zur Rechten des gleichen Factors, welcher die Grundzahl (Basis) der Potenz ist, schreibt, so z. B. ist $a.a.a = a^3$.

3tens, Der Exponent a^1 wird weggelassen, weil nach 1tens, $a^1 = 1.a = a$ ist.

4tens, Den 2ten Grad der Potenz nennt man das Quadrat, den 3ten den Cubus; daher ist von 2 das Quadrat $= 2.2 = 4$, der Cubus $= 2.2.2 = 8$, die 4te Potenz $= 2.2.2.2 = 16$; u. s. w.

Anmerkung.

Wenn die Seite eines Quadrats (regulaire viereckigte Fläche) z. B. a Fuß hat, so ist nach der Lehre der Geometrie sein

Inhalt a² Quadratfuß, und wenn die Seite eines Würfels oder Cubus (regulairer, ein Quadrat zur Grundfläche habender Körper) z. B. a Fuß hat, so ist sein Inhalt a^3 Cubikfuß, daher obige Benennung.

Zusaetze:

1tens, Da man nach §. 16, 8tens, nur Zahlen mit sich selbst multipliciren kann, so beziehet sich die Lehre von Potenzen auch blos auf Zahlen und bedeutet daher auch hiebei der Ausdruck »Größe« nichts anderes als durch Buchstaben ausgedrückte Zahlen;

2tens, Die Zahl 1 zu jeder beliebigen Potenz erhoben, giebt wieder 1, denn z. B. $1^3 = 1.1.1 = 1$; und ebenso $1^n = 1$.

§. 96.

Erklärungen:

1tens, Eine Wurzel einer Zahl a ist diejenige Zahl x, welche als eine nach Belieben von x genommene Potenz = dieser Zahl ist.

2tens, Das Zeichen, daß von einer Zahl a die Wurzel verlangt wird oder ausgezogen werden soll, ist ($\sqrt{}$), welches vor diese Zahl a gesetzt, und in selbiges derjenige Grad geschrieben wird, welcher der Wurzel als Potenz zukommen soll, wenn sie die Zahl a wieder giebt; so ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige Zahl, welche nach Erkl. 1. des §. 95. n mal als Faktor genommen, die Zahl a zum Produkte giebt, also ist z. B. $\sqrt[n]{a} = x$, so ist $x^n = a$.

3tens, Diejenige Zahl, welche nach §. 95, 4tens, als Quadrat die Zahl a giebt, nennt man die Quadratwurzel von a, so wie diejenige Zahl, welche als Cubus die Zahl b giebt, die Cubikwurzel von b, und diejenige Zahl, welche als nte Potenz die Zahl c giebt, die nte Wurzel von c.

4tens, Man nennt daher (Erkl. 2 des §. 95) die Zahl, welche in dem Wurzelzeichen steht, den Grad oder den Exponenten der Wurzel, welcher jedes

Quadratwurzel nicht beigesetzt wird, so ist $\sqrt{a} =$ der Quadratwurzel von a.

5tens, Die 1te Wurzel einer Zahl ist diese Zahl selbst, denn ist $\sqrt[1]{a} = x$, so ist nach 2tens, $x^1 = a$, nun ist (nach Erkl. 3 des §. 95) $x^1 = x$, folglich auch $x = a = \sqrt[1]{a}$.

6tens, Wenn mehrere mit Zeichen verbundene Zahlen, z. B. $a + b$ zu der nten Potenz erhoben oder aus ihnen die nte Wurzel gezogen werden soll, so wird dieß $(a+b)^n$ oder $\overline{a+b}^n$ und $\sqrt[n]{(a+b)}$ oder $\sqrt[n]{\overline{a+b}}$ geschrieben.

Zusaetze:

1tens, Da sich nach der obigen ersten Erklärung der Zus. 1 des §. 95 auch auf Wurzeln bezieht, so können auch allgemein ausgedrückte Wurzelgrößen blos Zahlen ausdrücken.

2tens, Es gelten also alle Sätze, die bisher von ganzen und gebrochenen Zahlen erwiesen wurden, auch für Potenzen und Wurzeln, und es giebt daher Gleiches zu gleichen Potenzen erhoben, und ebenso aus Gleichem eine gleiche Wurzel ausgezogen, wieder Gleiches, (nach §. 4, 6tens).

3tens, Jede Wurzel von 1 ist wieder 1, denn z. B. ist $\sqrt[n]{1} = x$, so ist $x^n = 1$, und (nach Zus. 2 des §. 95) $1^n = 1$, folgl. $x^n = 1^n$, also (nach 2tens) $x = 1$ und $\sqrt[n]{1} = 1$.

§. 97.

Lehrsatz:

Da nach §. 95 eine Zahl durch Multiplication zu einer Potenz erhoben wird, so gehen folgende Regeln daraus hervor, als:

1tens, Ein Produkt wird zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Factor dazu erhebt, denn nach §. 77, 1tens, ist $ab \times ab = aabb$, d. i.

$$(ab)^2 = a^2 b^2;$$

und allgemein $(ab)^n = a^n b^n$;

2tens, Ein Bruch wird zu einer Potenz erhoben, wenn man Zähler und Nenner zu derselben erhebt, denn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$ und allgemein $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

3tens, Eine Zahl wird, so wie mehrere mit dem Zeichen + oder — verbundene Größen, durch Multiplication mit sich selbst (nach §. 77, 4tens) oder nach den im folgenden 4ten bis 8ten Abschnitt vorgetragenen Lehren zu einer Potenz erhoben.

Anmerkung.

In der angehefteten vierten Tabelle siehe dergleichen Erhebungen der Zahlen von 1 bis 1000 zum Quadrate und Cubus, und der Zahlen von 1 bis 100 zur 2ten bis 6ten Potenz.

4tens, Eine Potenz wird zu einer verlangten Dignität erhoben, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Dignität multiplicirt, d. i. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, denn z. B. $\left(a^2\right)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = aaaaaa = a^6 = a^{2.3}$, oder $\left(a^2\right)^3$ drückt aus, daß der 2malige Factor a, dreimal, also der Factor a, 2.3 mal, d. i. 6 mal vorkommen soll. Da also die 4te Potenz einer Zahl das Quadrat des Quadrats dieser Zahl ist, so nennt man auch die 4te Potenz das Biquadrat und die 9te Potenz den Bicubus.

5tens, In Beziehung der Zeichen geben Zahlen

a) mit dem Zeichen + bei jeder Potenzerhebung wie-

der $+$; denn $(+a)^n = +a.+a.+a...n = +a^n$; und solche

b) mit dem Zeichen $-$ bei Potenzen

α) mit geraden Exponenten $+$, denn $2m$ ist nach Zus. des §. 80 eine gerade Zahl, und $(-a)^{2m} = \overline{(-a)^2}^m$, (nach 4^{tens}); und $(-a)^2 = -a.-a = +aa = +a^2$, also $\overline{(-a)^2}^m = (+a^2)^m = +a^{2m}$;

β) mit ungeraden Exponenten $-$, denn $2m+1$ ist nach Zus. des §. 80 eine ungerade Zahl und $(-a)^{2m+1} = (-a)^{2m} \times -a$ (nach Erkl. 2 des §. 95), also $= +a^{2m} \times -a = -a^{2m+1}$.

Zusatz:

Jede Wurzelgröße zu der Potenz von dem Grade der Wurzelgröße erhoben, giebt die unveränderte Größe wieder, d. i. $(\sqrt[n]{a})^n = a$; denn ist z. B. $\sqrt[n]{a} = x$, so ist $(\sqrt[n]{a})^n = x^n$, (nach Zus. 2 des §. 96) und nach Erkl. 2 des §. 96 ist $x^n = a$, folgl. auch $(\sqrt[n]{a})^n = a$, d. i. jede Zahl zu einer Potenz erhoben und dann die Wurzel von dem nemlichen Grade von ihr ausgezogen, oder umgekehrt, verändert diese Zahl nicht.

§. 98.

Lehrsatz:

Nach §. 96 wird aus einer Zahl eine Wurzel gezogen, wenn man diejenige Zahl findet, welche so oft als es der Grad der Wurzel angiebt, als Factor mit sich multiplicirt, diese Zahl wieder giebt; es gelten daher auch bei der Wurzelausziehung die im §. 97 aufgestellten Regeln, nemi.

1^{rens}, Aus einem Produkte wird eine Wurzel gezogen, wenn

man solche aus jedem Factor ziehet, d. i. $\sqrt{(ab)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; denn $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$, nach §. 97, 1tens, und Zus.; folgl. (nach §. 96. Erkl. 2) ist $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ die verlangte Wurzel, und allgem. $\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2tens, Aus einem Bruche wird eine Wurzel gezogen, wenn man solche sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner ziehet, d. i. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, denn $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$; nach §. 97, 2tens, und Zus.) folgl. (nach Erkl. 2 des §. 96) ist $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ die verlangte Wurzel, und im Allgem.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

3tens, Aus einer Zahl oder mehreren mit dem Zeichen + oder — verbundenen Größen wird eine Wurzel gezogen, wenn man diejenige Zahl findet, welche zu einer Potenz von dem Grade der verlangten Wurzel erhoben, die Summe dieser Zahlen wieder giebt.

Anmerkung.

Aus der angehefteten vierten Tabelle sind die Wurzeln bis zum 6ten Grade aus Potenzen ganzer Zahlen von 1 bis 100, und bis zum 3ten Grade aus Potenzen der Zahlen von 1 bis 1000 zu ersehen. Z. B. soll die 5te Wurzel von 12523325 76 angegeben werden, so suche man in der Tabelle der Potenzen vom 5ten Grade diese Zahl, wo dann in der ersten Spalte die Grundzahl, d. i. die 5te Wurzel davon, = 66 stehet; oder ist die Cubikwurzel von 70 anzugeben, so findet man, da 70 keine Potenz vom 3ten Grade einer ganzen Zahl ist, solche in der fünften Tabelle über die Wurzeln ganzer Zahlen von 1 bis 1000, wornach sie = 4,1212853.. ist. Ueber Ausziehung der Wurzeln mehrtheiliger Zahlen siehe im folgenden 4ten bis 8ten Abschnitte.

4tens, Aus einer Potenz wird eine verlangte Wurzel gezogen, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem Expo-

nenten der Wurzel dividirt, d. i. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$; denn $(a^2)^3 = a^6$, (nach §. 97, 4^{tens}) und also ist (nach Erkl. 2. des §. 96) a^2 die richtige Wurzel; im Allgem.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Zusaetze:

1^{tens}_{n}, Eine Potenz mit gebrochenen Exponenten, d. i. deren Exponent ein Bruch ist, deutet also an, daß aus der Potenz von dem Grade des Zählers, eine Wurzel von dem Grade des Nenners gezogen werden soll, d. i. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ bedeutet ein Produkt von n Factoren eines Produkts aus m gleichen Factoren a;

2^{tens}_{n}, Eine Wurzelgröße wird nicht verändert, wenn man den Exponenten der Wurzel und den Exponenten der nach dem Wurzelzeichen folgenden Größe durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt oder wenn man die Zeichen dieser Exponenten zugleich in ihre entgegengesetzten verwandelt; denn nach vorigem Zusatz ist der erstere Exponent als der Nenner des letzteren zu betrachten, daher dies nach 1ten Zus. des §. 45 und nach 3ten Zus. des §. 83 richtig ist; d. i. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}} = \sqrt[-n]{a^{-m}}; \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[-n]{a^m}$; und $\sqrt[-n]{(3a+b^{-3})} = \sqrt[n]{(3a+b^{-3})^{-1}}$;

§. 99.

Lehrsaetze:

1^{tens}_{n}, Eine Wurzelgröße wird zu einer Potenz erhoben, wenn man entweder die Größe nach dem Wurzelzeichen zu solcher erhebt oder wenn man den Exponenten der Wurzel mit dem verlangten Grade dividirt, denn $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r =$

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$, (nach 1ten Zuf. des §. 98) und $= a^{\frac{mr}{n}}$, (nach §. 97, 4tens) und $= \sqrt[n]{a^{mr}} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^m}$; (nach 2ten Zuf. des §. 98).

2tens, Aus einer Wurzelgröße wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man entweder den Exponenten der Größe nach dem Wurzelzeichen mit dem verlangten Grad dividirt, oder den Exponenten in dem Wurzelzeichen damit multiplicirt, denn $\sqrt[r]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)} = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{\frac{m}{n}}{r}}$, (nach 1ten Zuf. des §. 98 und nach §. 98, 4tens), $= a^{\frac{m}{nr}} = a^{\frac{mr:}{n}} = \sqrt[nr]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{r}}}$;

§. 100.

Zusaetze:

1tens, Da der Coeffizient nach §. 73 so viel als ein Factor ist, so wird er, wenn Potenzen oder Wurzelgrößen einen solchen bei sich haben, auch wie ein Factor nach §. 97, 1tens, und §. 98, 1tens, behandelt.

2tens, In Beziehung der Zeichen kann die Wurzel

a) mit einem geraden Exponenten positiv oder negativ seyn, denn nach §. 97, 5tens, ist $(\pm x)^{2n}$ eine positive Größe und z. B. $= +a$, folglich auch (nach §. 96, Zuf. 2) $\sqrt[2n]{a} = \pm x$; wo $\pm$ ausdrückt »plus oder minus«.

b) Mit ungeradem Exponenten bekommt die Wurzel das Zeichen der Größe, denn nach §. 97, 5tens, ist $(+x)^{2n+1} = +a$, und $(-x)^{2n+1} = -a$,

folgl. (nach §. 96, Zus. 2) ist $\sqrt[2n+1]{a} = +x$,
und $\sqrt[2n+1]{-a} = -x$.

§. 101.

Lehrsatz:

Da jede Potenz einer ganzen Zahl, als ein Produkt von ganzen Zahlen, wieder eine ganze Zahl seyn muß, so ist auch jede Wurzel einer ganzen Zahl wieder eine solche. Und aus eben dem Grunde ist auch die Potenz und die Wurzel eines ächten Bruches wieder ein ächter Bruch.

Zusatze:

1tens, Wenn die Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie auch kein Bruch, und eine solche Zahl, welche sich weder durch eine ganze, noch durch eine gebrochene Zahl vollkommen darstellen läßt, heißt eine Irrationalzahl, im Gegentheil Rationalzahl; z.B. $\sqrt{2}$, dann $\sqrt{3}$ sind Irrationalzahlen, so wie alle diejenigen Quadrat- und Cubik-Wurzeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000, wobey nach der angehefteten letzten Tabelle Dezimalstellen sind.

2tens, Nach §. 97, 5tens, ist eine Wurzel mit geradem Exponenten von einer negativen Zahl unmöglich, z.B. $\sqrt{-a}$, denn es giebt keine Zahl, die mit sich selbst multiplicirt, negativ wird; und solche Größen nennt man daher unmögliche oder eingebildete Größen.

3tens, Wenn der Quotient zweyer Zahlen eine Irrationalzahl ist, also beyde durch einander nicht genau gemessen werden können, so nennt man sie in dieser Beziehung incommensurable Größen, während man Größen, von denen man den Quotienten genau angeben kann, commensurable nennt. Annäherungsweise kann man aber auch incommensurable Größen als commensurable annehmen.

Zweyter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 102.

Erklaerung:

Potenzen sind nach 1ten Zus. des §. 73 gleichartig, wenn sowohl die Grundzahlen, als deren Exponenten gleich sind, ungleichartig aber, wenn eines von diesen ungleich ist;

so sind z. B. $2a^2$ und $5a^2$ gleichartig; $2a^2$, $2b^2$, $2a^3$, aber ungleichartig.

Zusätze:

1tens, Potenzen werden daher addirt,

a) wenn sie gleichartig sind, wenn man sie nach §. 74 addirt, d. i. z. B. $2a^2 + 5a^2 = 7a^2$; $-2a^2 + (-5a^2) = -7a^2$; $3a^3 + (-2a^3) = a^3$; und $4a^4 + (-6a^4) = -2a^4$.

b) wenn sie ungleichartig sind, wenn man sie nach Zus. 3 des §. 74 mit ihren Zeichen unverändert zusammenschreibt, d. i. z. B. $2a^2 + b^2 + (-3a^3) = 2a^2 + b^2 - 3a^3$.

2tens, Potenzen werden subtrahirt, wenn man den Subtrahend mit entgegengesetzten Zeichen (nach §. 76, 1tens") dem Minuend nach 1tens", addirt.

§. 103.

Lehrsatz:

Potenzen werden multiplicirt,

1tens", wenn die Grundzahlen gleich sind, wenn man ihre Coeffizienten multiplicirt, die Grundzahlen unverändert läßt, und ihre Exponenten addirt, d. i. $2a^n \cdot 3a^m =$

$6a^{n+m}$; denn z. B. $a^3 \cdot a^2 = aaa \times aa = a^5 = a^{3+2}$, daher auch $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ und allgem. $ax^m \cdot cx^n = acx^{m+n}$ (nach §. 77, 1^{tens}).

2^{tens}, wenn die Grundzahlen ungleich sind, wenn man ihre Coeffizienten multiplicirt und die Größen mit ihren Coeffizienten unverändert als Factoren beisetzet, d. i.

$2a^n \cdot 3b^m = 6a^n b^m$; (nach §. 77, 1^{tens}).

Zusatze:

1^{tens}, In Beziehung der Zeichen der Potenzen geben gleiche Zeichen der Factoren im Produkte +; ungleiche aber —; (nach Zus. des §. 77 und Zus. 2 des §. 96).

2^{tens}, Sind die Potenzen gleichnamig, d. i. sind die Exponenten derselben gleich, so kann man auch blos die Grundzahlen mit einander multipliciren, und den Exponenten, als ihren gemeinschaftlichen, dem Produkte unverändert beisetzen; d. i. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$; denn nach Lehrsatz ist $a^n \cdot b^n = a^n b^n$ und nach §. 97, 1^{tens}, $= (ab)^n$; also z. B. $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$.

Zusatze:

1^{tens}, Eine Potenz mit unächt gebrochenen Exponenten läßt sich daher so in Factoren zerlegen, daß, wenn man diesen unächten Bruch in eine gemischte Zahl verwandelt, der eine Factor, die nemliche Grundzahl mit der dadurch erhaltenen ganzen Zahl als Exponenten, und der andere Factor ebenfalls diese Grundzahl mit dem dadurch bekommenen ächten Bruche als Exponenten ist; z. B.

$a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}$;

2^{tens}, Soll eine Potenz mit unächten gebrochenen Exponenten als Wurzel ausgedrückt werden, so zerlegt man dieselbe nach 1^{tens} in Factoren und drückt den Factor mit

dem ächten gebrochenen Exponenten nach 1ten Zuf. des §. 98, als Wurzel aus; setzt also $a^{\frac{5}{2}} = a^2 \sqrt{a}$;

§. 104.

Lehrsatz:

Potenzen werden dividirt,

1tens, wenn die Grundzahlen gleich sind, wenn man ihre Coeffizienten dividirt, die Grundzahlen unverändert läßt und den Exponenten des Divisors von den des Dividenden subtrahirt; d. i. $ax^n : bx^m = \frac{a}{b} x^{n-m}$, denn

z. B. $a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3 = a^{5-2}$

und also allgem. $ax^n : bx^m = \frac{a}{b} x^{n-m}$; (n. §. 78, 1tens),

2tens, wenn die Grundzahlen ungleich sind, wenn man ihre Coeffizienten dividirt, und die Größen unverändert mit ihren Exponenten in den Quotienten setzet; d. i.

$$ax^n : by^m = \frac{a}{b} x^n : y^m, = \frac{ax^n}{by^m} \text{ (nach §. 78, 1tens).}$$

$$= \frac{ax^n}{by^m};$$

Zusatze:

1tens, In Beziehung der Zeichen der Potenzen geben gleiche Zeichen des Dividends und Divisors im Quotienten +, ungleiche aber —; (nach 1ten Zuf. des §. 103, u. nach §. 78, 2tens).

2tens, Sind die Potenzen gleichnamig, so kann man auch blos die Grundzahlen durch einander dividiren, und dem Quotienten den Exponenten derselben unverändert beisetzen; d. i. $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; denn nach §. 97,

2tens, ist $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n$.

3tens, Eine Potenz mit negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1 und dessen Nenner dieselbe Potenz mit positiven Exponenten ist; d. i. $a^{-n} = a^{\frac{1}{n}}$, denn $a^{-n} = a^{n-2n} = a^n : a^{2n} = a^n : (a^n \cdot a^n) = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$, so wie dieß auch daraus hervorgeht, daß ein negativer Exponent nach §. 95, 1tens, nichts anderes bedeutet, als daß die Grundzahl als Factor entgegengesetzt, also als Divisor so oft vorkommen soll, als es der Exponent angiebt, d. i. z. B. $a^{-3} = (1:a):a):a = 1:(aaa)$ nach §. 38, 4tens, $= 1 : a^3$ und $a^{-n} = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$.

4tens, Ein Bruch wird daher zu einer Potenz mit negativen Exponenten erhoben, wenn man den Bruch umkehrt und zu der nemlichen Potenz mit positiven Exponenten erhebt; denn z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$;

5tens, Aus einem Bruche wird eine Wurzel mit negativen Exponenten gezogen, wenn man dieselbe Wurzel mit positiven Exponenten aus dem umgestürzten Bruche zieht; denn z. B. $\sqrt[-n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}$, nach 2ten Zus. des §. 98, und $= \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ nach vorigem Zusatz.

6tens, Jede Zahl mit dem Exponenten Null ist $= +1$, d. i. $(\pm a)^0 = 1$; denn $(\pm a)^0 = (\pm a)^{n-n} = \pm a^n : \pm a^n = +1$; so wie es auch daraus hervorgeht, da der Exponent 0 angiebt, daß die Grundzahl gar nicht als Fac-

tor vorkommen soll, also nach §. 95, 1^{tens}, z. B. $a^0 = 1 \cdot a^0 = 1$ ist.

7^{tens}, Die Differenz zweyer Größen ist von der Differenz gleicher Potenzen derselben ein Maaß, z. B. $x-y$ von $x^n - y^n$; und die Summe zweyer Größen ist von der Summe gleicher Potenzen derselben ein Maaß, wenn dieselben ungerade Exponenten haben, und von der Differenz derselben, wenn ihre Exponenten gerade Zahlen sind; z. B. $x+y$ ist von $x^{2m+1} + y^{2m+1}$ und von $x^{2m} - y^{2m}$ ein Maaß; welches im Betreffe der Abkürzungen auch manchen Vortheil gewähret; (vergleiche Zus. des §. 84).

§. 105.

Lehrsatz:

Wenn bei der Multiplication oder Division der Potenzen die Exponenten Zeichen bei sich haben, so gelten dennoch die in den Lehrsätzen §. 103 und §. 104 gegebenen Regeln, und es ist

1^{tens}, $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$; und $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}$;

2^{tens}, $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$; und $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$;

Beweis:

Nach Zus. 3 des §. 104 ist $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, folgl.

1^{tens}, $a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$;

(nach Lehrs. §. 104.)

und $a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$

(nach Lehrs. §. 103.) $= a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$.

2tens, $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; und

$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} = a^{-m+n}$

Zusaetze:

1tens, Eine Potenz wird in eine dergleichen mit entgegengesetzten Exponenten verwandelt, wenn man dieselbe Bruchweise anschreibt und dann Zähler und Nenner mit derjenigen Potenz, in die solche verwandelt werden soll, multiplicirt; denn z. B. $a^3 = \frac{a^3}{1} = \frac{a^3 \cdot a^{-3}}{1 \cdot a^{-3}}$

$= \frac{1}{a^{-3}}$, (nach Zus. 6. des §. 104); und $a^{-3} = \frac{a^{-3}}{1}$

$= \frac{a^{-3} \cdot a^3}{1 \cdot a^3} = \frac{1}{a^3}$; und man kann also jeden Factor vom Zähler mit entgegengesetzten Exponenten in den Nenner setzen und umgekehrt.

2tens, Sollen mehrere der mit Zeichen verbundenen Größen eines Zählers oder Nenners in dergleichen mit entgegengesetzten Exponenten verwandelt werden, so multiplicire man den Zähler und den Nenner des Bruches mit dem Produkte der zu verwandelnden Potenzen und zwar mit ihrem in dem ganzen Bruche vorkommenden höchsten, jedoch entgegengesetzten Exponenten; z. B. bei nachstehenden Beispielen sollen die negativen Exponenten weggeschaffet werden; daher man setzet:

a) $\dfrac{4a^{-2}+d^{-2}}{b^{-3}} = \dfrac{(4a^{-2}+d^{-2})\,a^2\,b^3\,d^2}{b^3\,.\,a^2\,b^{-3}\,d^2}$

$= \dfrac{(4d^2+a^2)\,b^3}{a^2\,d^2}$;

b) $\dfrac{z^{-3}}{a+y^{-2}} = \dfrac{z^{-3}\,.\,y^2\,z^3}{(a+y^{-2})\,y^2\,z^3} = \dfrac{y^2}{(ay^2+1)z^3}$;

c) $\dfrac{a^{-2}\,b^3}{a^{-3}+b^{-3}} + \dfrac{b^{-3}d+a^{-2}}{c^{-3}+a^{-5}} - \dfrac{a^{-2}\,b^3\,.\,a^3b^{-3}}{(a^{-3}+b^{-3})a^3b^3}$

$+ \dfrac{(b^{-3}d+a^{-2})\,a^5\,b^3\,c^3}{(c^{-3}+a^{-5})\,a^5\,b^3\,c^3} = \dfrac{ab^6}{b^3+a^3}$

$+ \dfrac{(a^5d+a^3\,b^3)c^3}{(a^5+c^3)\,b^3}$;

d) $\left\{\dfrac{3a^{-2}+b}{cd^{-3}+b}\right\}^{-3} = \left\{\dfrac{cd^{-3}+b}{3a^{-2}+b}\right\}^3$, (nach 4ten Zuf. des §. 104), $= \left\{\dfrac{(c+bd^3)\,a^2}{(3+a^2b)d^3}\right\}^3$;

3tens, Im Resultate werden die Potenzen immer so, daß deren Exponenten positiv sind, angegeben, auch dieselben so geordnet, daß die Glieder nach dem Werthe der Exponenten ein und derselben Grundzahl stehen, weshalb man auch bei einer Division den Dividenden und Divisor schon so, d. i. lexicographisch anschreibt, um den Quotienten (nach 1ten Zuf. des §. 78) hiernach zu erhalten, d. i. statt z. B. $ax^2+a^2x+x^3+a^3$ schreibt man $x^3+ax^2+a^2x+a^3$.

Dritter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

§. 106.

Erklärung:

Wurzelgrößen sind nach 1ten Zus. des §. 73 gleichartig, wenn die Größen, ihre Exponenten und die Exponenten in dem Wurzelzeichen gleich sind, z. B. $2\sqrt[n]{a^m}$ und $3\sqrt[n]{a^m}$; hingegen ungleichartig, wenn eines von diesen ungleich ist, z. B. $2\sqrt[n]{a}$, $2\sqrt[m]{a}$, $2\sqrt[n]{a^2}$, $2\sqrt[n]{b}$.

Zusatz:

Wurzelgrößen lassen sich nach §. 98, Zus. 1, auf den Ausdruck von Potenzen bringen, d. i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, folgl. wird mit ihnen, wie mit Potenzen gerechnet.

§. 107.

Lehrsatz:

Wurzelgrößen werden daher addirt,

1tens, wenn sie gleichartig sind, wenn man sie nach §. 74. addirt, d. i. z. B. $3\sqrt{c} + 2\sqrt{c} = 5\sqrt{c}$; $3\sqrt{c} + (-2\sqrt{c}) = \sqrt{c}$; $-4\sqrt{c} - 3\sqrt{c} = -7\sqrt{c}$; und $5\sqrt{c} + (-7\sqrt{c}) = -2\sqrt{c}$.

2tens, wenn sie ungleichartig sind, wenn man sie mit ihren Zeichen nach Zus. 3. des §. 74 unverändert zusammenschreibt; z. B. $2\sqrt[n]{a} + 3\sqrt[m]{a} + (-5\sqrt[n]{a^2}) + \sqrt[n]{b} = 2\sqrt[n]{a} + 3\sqrt[m]{a} - 5\sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{b}$.

Zusatz:

Wurzelgrößen werden eben daher subtrahirt, wenn man den Subtrahend mit entgegengesetzten Zeichen (nach §. 76, 1tens) dem Minuenden nach Lehrsatz addirt.

§. 108.

Lehrsaetze:

1tens, Eine Wurzelgröße wird auf eine kleinere Benennung, d. i. auf einen kleineren Grad gebracht, wenn man den Exponenten der Größe und den in dem Wurzelzeichen durch ihr gemeines Maaß dividirt; (nach dem im 2ten Zuf. des §. 98 angeführtem Grunde).

2tens, Eben deswegen wird eine Wurzelgröße auf ihre kleinste Benennung gebracht, wenn man den Exponenten der Größe und den in dem Wurzelzeichen durch ihr größtes gemeines Maaß dividirt.

3tens, Wurzelgrößen werden gleichnamig gemacht, wenn man die Exponenten der Größen und in den Wurzelzeichen zugleich durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wodurch dieselben gleich werden, daher man hiebei nach §. 46 gemäß des 1ten Zuf. des §. 98. verfährt.

4tens, Wurzelgrößen werden auf gleiche kleinste Benennung gebracht, wenn man zuerst nach 2tens, jede einzeln auf ihre kleinste Benennung bringt, sodann für sämmtliche in denen Wurzelzeichen stehende und nach 2ten Zuf. des §. 98. positiv gemachte Exponenten, die kleinste durch sie theilbare Zahl suchet, welches die gemeinschaftliche kleinste Benennung ist. Dividirt man nun diese durch die Zahl der vorigen Benennung, so giebt der Quotient die Zahl, mit welcher man den Exponenten der zugehörigen Größe noch multipliciren muß; denn nach Zuf. 1 des §. 98 ist der Exponent im Wurzelzeichen als Nenner und der der Größe als Zähler eines Bruches zu betrachten, daher diese Angabe nach §. 48 richtig ist;

z. B. $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[5]{a^{-3}}, \sqrt[-8]{a^4}$ sind $= \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[5]{a^{-3}}, \sqrt{a^{-1}}$,

und $= \sqrt[30]{a^{20}}, \sqrt[30]{a^{-18}}, \sqrt[30]{a^{-15}}$;

§. 109.

Lehrsaetze:

Wurzelgrößen werden mit einander multiplicirt,

1^tens, wenn sie gleichnamig sind, wenn man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen multiplicirt, dieses aber nebst dem darinn stehenden Exponenten unverändert läßt; denn z. B. $2\sqrt[n]{a^m} \cdot 3\sqrt[n]{b^r} = 6\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^r}$, (nach §. 77, 1^tens,) $= 6\sqrt[n]{a^m b^r}$ (nach §. 98, 1^tens).

2^tens, wenn sie ungleichnamig sind, wenn man sie nach §. 108, 3^tens oder 4^tens, gleichnamig macht und dann nach 1^tens, verfährt.

Zusatz:

In Beziehung der Zeichen geben gleiche Zeichen der Factoren im Produkte +, ungleiche —.

§. 110.

Lehrsatz:

Wurzelgrößen werden nach §. 109 ebenso durch einander dividirt,

1^tens, wenn sie gleichnamig sind, wenn man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen dividirt, dieses aber nebst den darinn stehenden Exponenten unverändert läßt, denn z. B. $6\sqrt[n]{a} : 2\sqrt[n]{b} = 3\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, (nach §. 78, 1^tens), $= 3\sqrt[n]{(a:b)}$;

2^tens, wenn sie ungleichnamig sind, wenn man sie nach §. 108, 3^tens, oder 4^tens, gleichnamig macht und dann nach 1^tens, verfährt.

Zusatz:

In Beziehung der Zeichen des Dividends und Divisors geben gleiche Zeichen im Quotienten +, ungleiche aber —.

§. 111.

Zusaetze:

1tens, Sind die Wurzelgrößen durch ganze Zahlen oder Potenzen zu multipliciren, oder zu dividiren, so multiplicire oder dividire man damit die Coeffizienten der Wurzelgrößen, oder man erhebe diese ganzen Zahlen oder Potenzen zu Potenzen von dem Grade der Wurzelgröße und setze ihnen das Wurzelzeichen mit dem neml. Grade vor, wodurch nach Zus. des §. 97 dieselben nicht verändert werden, und multiplicire und dividire dann nach den Lehrsätzen §. 109 und 110; z. B. $\sqrt{60.2} = 2\sqrt{60} = \sqrt{60} \cdot \sqrt{2^2} = \sqrt{60} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{60.4} = \sqrt{240}$;

und $a\sqrt[n]{x} : b = \frac{a}{b}\sqrt[n]{x} = a\sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{b^n} = a\sqrt[n]{\frac{x}{b^n}}$

2tens, Zerlegt man daher die Größen nach dem Wurzelzeichen so in Factoren, daß man aus einem die Wurzel ausziehen kann, so läßt sich solcher aus dem Wurzelzeichen bringen, z. B. da $\sqrt{60} = \sqrt{4.15}$, so ist $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$;

3tens, Im Resultate werden die Wurzelgrößen immer so angegeben, daß die vor das Wurzelzeichen nach 2tens zu bringenden Größen bereits vor dasselbe, dann die Wurzelgrößen nach §. 108, 2tens, auf ihre kleinste Benennung gebracht und sämmtliche Exponenten nach Zus. 2 des §. 98 und den Zusätzen des §. 105 positiv gemacht sind; auch werden im Resultate die Wurzelgrößen so dargestellt, daß bei einem nachfolgenden Bruche die Wurzel nicht mehr aus dessen Nenner zu ziehen ist, weshalb man nur den Zähler und Nenner mit derjenigen Potenz des Nenners zu multipliciren hat, wodurch der Nenner eine Rationalzahl wird, aus der man also die verlangte Wurzel zieht; z. B. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{bb^{n-1}}} =$

$\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$, und $\frac{\sqrt[5]{a}}{b^2} = \frac{\sqrt[5]{(ab^3)}}{\sqrt[5]{b^5}}$

$= \frac{\sqrt[5]{(ab)}}{b}$. Besteht aber der Nenner aus der Summe zweyer Quadratwurzeln, so darf man nur Zähler und Nenner mit der Differenz derselben multipliciren, um solche wegzuschaffen; denn z. B.

$(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$, folgl.

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \times (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$.

(vergleiche 2ten Zus. des §. 103).

Vierter Abschnitt.

Von dem Quadrate und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen.

§. 112.

Lehrsatz:

Wenn man eine aus 2 Gliedern bestehende, d. i. eine zweytheilige Größe, z. B. $a+b$ oder $a-b$ nach §. 97, 3tens, durch Multiplication zum Quadrate erhebt, so erhält man $a^2 + 2ab + b^2$ oder $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$; d. i. das Quadrat einer zweytheiligen Größe besteht jederzeit aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Produkte des ersten in den zweyten Theil, und dem Quadrate des zweyten Theils dieser Größe.

Zusatze:

1tens, Wenn man eine zweytheilige Größe zum Quadrate erheben will, so kann man sie daher nach dieser im Lehrsatze aufgestellten Formel dazu erheben, so ist z. B.

$10^2 = (6+4)^2 = 36+48+16 = 100$, oder

$10^2 = (12-2)^2 = 144-48+4 = 100$.

2tens, Ebenso läßt sich eine dreytheilige Größe nach dieser Formel zum Quadrate erheben, wenn man die ersten zwey Theile als den ersten =a, und den dritten Theil als den zweyten =b der Formel nimmt, und dann solche nach 1tens, zum Quadrate erhebt, z. B.

$(a+b+c)^2=(a+b^2)+2(a+b)c+c^2$; demnach §.97,3tens,

ist $(a+b+c)^2= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$;

$= (a+b)^2 +2(a+b)c+c^2$.

3tens, Desgleichen lassen sich nach der im Lehrsatze aufgestellten Formel auf die neml. Art nach 2tens, vier- und mehrtheilige Größen zum Quadrate erheben, wenn man immer die vorhergehenden Theile als den ersten =a, und den nachfolgenden Theil als den zweyten =b der Formel nimmt, d. i. wenn man mit diesem nachfolgenden weiteren Theile immer aufs Neue zu den gefundenen Quadrate der vorhergehenden Theile, $2ab+b^2$ dazu bestimmt.

Die Formel $a^2+2ab+b^2$ ist daher eine allgemeine Formel zur Quadrat-Erhebung vieltheiliger Größen, und es müssen daher in einem vollkommenen Quadrate vieltheiliger Größen alle die in dieser Formel angegebenen Theile der einzelnen Theile dieser Größe enthalten seyn.

4tens, Will man daher eine Quadratwurzel aus einer vieltheiligen Größe ziehen, so darf man daher nur solche lexicographisch ordnen und aus solcher nach der im Lehrsatz gegebenen Formel die einzelnen Theile a und b nach dem 2ten und 3ten Zus. suchen; so ist z. B.

1^{tens}, $\sqrt{(4x^2+4xy+y^2)}=2x+y$; denn man suche nach der Formel aus $4x^2=a^2$, a; so ist solches nach §. 98, 1^{tens}, $= 2x$, und ziehe dieses gefundene Quadrat von a, also

$a^2 = 4x^2$: : ab, so bleibt

$4xy+y^2$, in welchem nach der Formel $2ab+b^2=(2a+b)b$ enthalten seyn muß, daher man b findet, wenn man mit $2a=4x$ hinein dividirt, also $4xy:4x=y=b$; worauf man

$(2a+b)b = 4xy+y^2$ abzuziehen hat, wodurch das Quadrat, wenn es ein vollkommenes einer zweytheiligen Größe ist, erschöpft ist.

2^{tens}_{m}, $\sqrt{(\frac{1}{9}x^2 - \frac{8xy}{3} + 16y^2 + xz - 12yz + \frac{9z^2}{4})} = \frac{1}{3}x - 4y + \frac{3}{2}z$; dann nehme

$a^2 = \frac{1}{9}x^2$, = = = so ist $a = \frac{1}{3}x$, nach §. 98, 1^{tens}_{m} u. 2^{tens}_{m}, a^2 nun abgezogen, bleibt

$-\frac{8xy}{3} + 16y^2 + xz - 12yz + \frac{9x^2}{4}$; daher man aus einem Gliede, worin $2a = \frac{2x}{3}$ als Factor enthalten ist, den andern Factor $= b$ der Formel nimmt, d. i. da $-\frac{8xy}{3} : \frac{2x}{3} = -4y$ ist, so ist $-4y = b =$ dem zweyten Theil der Wurzel, daher man nun

$(2a+b)b = -\frac{8xy}{3} + 16y^2$ = = = abzieht, und weil das Quadrat noch nicht erschöpft ist, so besteht die Wurzel aus mehr, als zwey Theilen, und man hat daher nach dem 2ten Zuf. $a + b = \frac{1}{3}x - 4y$ als den ersten Theil der Wurzel $= a$ zu nehmen, und den zweyten Theil b nach der Formel, als den dritten Theil der Wurzel, wie vorher zu bestimmen. Da nun das Quadrat von a oder $(\frac{1}{3}x - 4y)^2$

$+ \quad -$

$xz - 12yz + \frac{9z^2}{4}$;

schon abgezogen, so hat man also aus dem Reste durch Division mit $2a = \frac{2x}{3} - 8y$, daher (nach §. 78, 4^{tens}) durch Division mit $\frac{2x}{3}$, das neue b oder den dritten Theil der Wurzel zu suchen, und es ist $xz \frac{2x}{3} = \frac{3}{2} z = b$,

und $(2a+b)) = xz - 12yz + \frac{9z^2}{4}$; daher die 3 Theile der Wurzel $= \frac{1}{3}x - 4y + \frac{3}{2}z$ gefunden sind.

$- \quad + \quad -$

Anmerkung.

Besteht die Wurzel aus mehr als drey Theilen, so werden solche nach dem nemlichen weiteren Verfahren (nach 3ten Zus.) gefunden; und ist das Quadrat kein vollkommenes, sondern ein unvollkommenes, so kann man sich durch dies nemliche Verfahren (je weiter man es fortsetzet, desto mehr) der Quadratwurzel nähern, jedoch solche nach 1ten Zus. des §. 101 nie vollkommen bestimmen. Auch kann man die Zeichen der Glieder der Quadratwurzel (nach §. 100, 2tens, a) entgegengesetzt setzen.

5tens, Ebenso, wie im 1ten Zus. bei einer zweytheiligen Zahl geschehen, kann man auch eine zweyziffrige Zahl zum Quadrate erheben, indem man das erste Ziffer (die Zehner) als den ersten Theil a, und das zweyte Ziffer (die Einer) als den zweyten Theil b der Formel nimmt, die erhaltenden Theile nach ihrer Ordnung aber zur Addition so unter einander setzt, daß der nachfolgende immer um eine Stelle weiter rechts steht, wodurch man durch deren Summe das richtige Quadrat erhält; z. B.

$64^2 = 4096$; denn $a^2 = 6^2 = 36$

$2ab = 2.6.4 = 48$

$b^2 = 4^2 = 16$

also $64^2 = 4096$.

denn $10a+b$ ist nach §. 80. ein Ausdruck einer zweyziffrigen Zahl, und $(10a+b)^2$ ist $= 100a^2 + 10(2ab) + b^2$, woraus für a^2, $2ab$ und b^2 die angegebene Stelle hervorgeht.

Anmerkungen.

a) Multiplicirt man $2a+b$, d. i. die Zahl, die man durch das doppelte erste Ziffer und des neben sie rechts gesetzten zweyten Ziffers erhält, mit dem zweyten Ziffer $=b$, so erhält man sogleich $2ab+b^2$, welches man daher aber auch um 2 Stellen unter das angeschriebene a^2 mehr rechts setzen muß; z. B.

bei 64^2 ist $a^2 = 6^2 = 36$

$(2a+b)b = (124).4 = 496$

$64^2 = 4096$.

b) Ein besonderer Vortheil bei Erhebung der Zahlen zum Quadrate nach der eben angegebenen Methode gegen die durch bloße Multiplication geht aber nur bei mehrziffrigen Zahlen hervor, wenn man schon das Quadrat der Zahl ohne ihr letztes Ziffer weiß und daher nur $2ab+b^2$ zu demselben nach a) addiren darf, um das Quadrat der ganzen Zahl zu erhalten.

6tens, Eine mehrziffrige Zahl wird zum Quadrate erhoben, wenn man nach 5tens, deren beyde erste Ziffern links

zum Quadrate erhebt, die durch diese beyden Ziffern ausgedrückte Zahl als a und das nächstfolgende Ziffer als b der Formel nimmt, und wieder (2a+b)b auf die nemi. Art zusetzet und damit bis zu Ende fortfährt; d. i. z. B. $2183^2 = 4765489$, denn

$$a^2\ 2^2 = 4$$
$$(2a+b)b = 41.1 = 41$$
$$(2a+b)b = 428.8 = 3424$$
$$(2a+b)b = 4363.3 = 13089$$
$$\text{also } 2183^2 = 4765489.$$

7tens, Man erhält daher aus dem vorhergehenden 2a+b immer das jetzige 2a, wenn man ersterem sein letztes Ziffer b addirt, d. i. da bei vorigem Beispiel 2a+b=41, so ist das nächste 2a =41+1=42, und ebenso, weil dann wieder 2a+b=428, so ist das weiters nächste 2a =428+8=436.

§. 113.

Aufgabe:

Aus einer mehrziffrigen Quadratzahl (vollkommenen Quadrate) die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1tens, Das Quadrat eines Zahlziffers hat entweder ein oder zwey Ziffern, und nach §. 112, 6tens, enthält das Quadrat einer mehrziffrigen Zahl für jedes folgende Ziffer derselben immer um zwey Ziffern mehr, daher, wenn man die Quadratzahl von der rechten zur linken Hand in Klassen zu zwey Ziffern theilt, so enthält die Quadratwurzel so viele Ziffern als man Klassen erhalten hat, es mag die letzte Klasse links ein oder zwey Ziffern dadurch bekommen.

2tens, Man mache daher diese Eintheilung nach 1tens, und ziehe von der ersten Klasse links das (nach 1ten Zus. dieses §.) ihr gleiche oder nächst kleinere Quadrat eines Ziffers ab, und setze dieses Ziffer als den ersten Theil a

der Wurzel an, denn es ist nach §. 112, 6tens, das Quadrat des ersten Ziffers a in dieser Klasse enthalten.

3tens, Das doppelte Produkt des ersten Ziffers a in das zweite b ist in der Zahl, die man aus dem nach Abzug von a^2 gebliebenen Reste und des dazu gesetzten ersten Ziffers der nächsten Klasse erhält, enthalten. Man dividire daher diese Zahl durch das doppelte schon gefundene Ziffer a der Wurzel und nehme den erhaltenden Quotienten $=b$ als das zweyte Ziffer der Wurzel so, daß man dadurch $(2a+b)b$ von dem eben angegebenen Reste und der ihm beigesetzten nächsten Klasse abziehen kann.

4tens, Dem gebliebenen Reste setze man wieder die nächste Klasse bey, schreibe unter die dadurch erhaltende Zahl die schon gefundene doppelte Zahl der Wurzel so, daß deren letztes Ziffer unter das vorletzte Ziffer (rechts) der erstern Zahl zu stehen kommt, dividire nun mit der untern die obere Zahl ohne ihr letztes Ziffer rechts so, daß man den Quotienten $=b$ dadurch so erhält, daß man $(2a+b)b$ von dieser ganzen obern Zahl abziehen kann. Dieses dadurch gefundene neue Ziffer $=b$ schreibe man rechts zu den schon nach 2tens und 3tens erhaltenen Ziffern der Wurzel und zu dem eben angeschriebenen Divisor, multiplicire die hiedurch erhaltende Zahl $=2a+b$ mit eben diesem Ziffer $=b$ und ziehe das sich ergebende und unter diese Zahl gesetzte Produkt $=2ab+b^2$ von der dann ober ihr stehenden Zahl ab.

5tens, Das nach 4tens angegebene Verfahren setze man so lange fort, indem man immer die schon gefundene Zahl der Wurzel $=a$ der Formel nimmt, das neue b bestimmt und $2ab+b^2$ abzieht, bis man alle Ziffern der Wurzel dadurch erhalten hat.

Beispiel.

$\sqrt{4765489} = 2183$; denn

nach 1^{tens} u. 2^{tens} 4|76|54|89.

$a^2 = 4$ und $a = 2$;

*76 nach 3^{tens}, $2a = 4$ u. $7:4 = 1 = b$,

$2a + b = (41)$

$(2a + b)b = 41$

3554 u. 4^{tens}, $2a = 42$ u. $355:42 = 8 = b$,

$2a + b = (428)$

$(2a + b)b = 3424$

13089; nach 5^{tens}, $2a = 436$ und $1308:436$
$= 3 = b$,

$2a + b = (4363)$

$(2a + b)b = 13089$

Zusaetze:

1^{tens}, Zur Bestimmung der Quadrate einzelner Ziffern (2^{tens}) dient folgende Tabelle, in welcher die 2te Reihe die Quadrate der ober ihnen stehenden Zahlen, oder was einerlei, in welcher die 1te Reihe bie Quadratwurzeln der unter ihnen stehenden Zahlen angiebt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

2^{tens}, Da das doppelte Produkt zweyer einziffriger Factoren kleiner, als das doppelte zweyer zweyziffrigen, also kleiner als 2.10.10, d. i. kleiner als 200 ist, so kann auch der Rest, der nach Abzug von a^2, von der ersten Klasse bleibt, höchstens aus zwey Ziffern < 20 seyn.

3^{tens}, Ebenso folgt, daß, wenn das nächste b nicht 0 ist, der Rest, der von der zweyten Klasse bleibt, wenigstens aus 1r und höchstens aus 3 Ziffern < 200 besteht; und daß dann überhaupt der bei der nten Klasse bleibende Rest wenigstens aus $n-1$ und höchstens aus $n+1$ Ziffern bestehen kann, wobei,

wenn das Letztere der Fall ist, die zwey ersten Ziffern höchstens = 19 seyn können, indem b^2 zu 2ab addirt, dieses nicht in soweit vergrößert, daß solche = 20 werden.

$4^{tens}_{"}$, Erhält man den Rest größer, als er nach $3^{tens}_{"}$ seyn kann, so hat man daher einen Fehler gemacht und ihn zu verbessern, und ist der Rest sammt der ihm beigesetzten nächsten Klasse kleiner, als die Zahl, die man erhält, wenn man zu 2a noch 1 hinten ansetzet, so ist das nächste $b = 0$.

§. 114.

Aufgabe:

Aus einer ein- oder mehrziffrigen Zahl, deren Quadratwurzel eine Irrationalzahl ist, diese Wurzel durch Annäherung zu bestimmen. (Anmerkg. zu $4^{tens}_{"}$, des §. 112).

Auflösung:

Man hänge dieser Zahl soviel Paar Nullen an, als man will, und verfahre wie im vorigen §. bei Quadratzahlen, bezeichne aber die in der Wurzel durch diese angehängten Paare von Nullen erhaltenden ebensoviel Ziffern, als Dezimalen der Wurzel, so nähert man sich der wahren Wurzel um so mehr, je mehr man Dezimalen dadurch bestimmt, also je mehr man Paare von Nullen der Zahl angehängt hat.

Beweis:

Ist die Zahl $= A$, und man hängt derselben Paare von Nullen, z. B. 2n Nullen an, so ist dann die Zahl $= 10^{2n}A$; man hat daher solche wieder mit 10^{2n} zu dividiren, damit sie dadurch nicht verändert werde, also $A = \frac{10^{2n}A}{10^{2n}}$; folgl. ist $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{(10^{2n}A)}}{\sqrt{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{(10^{2n}A)}}{10^n}$, (nach Zus. 2, des §. 96, dann

§. 93, 2^{tens}_{u} und 4^{tens}_{u}); d. i. man dividire die erhaltene Wurzel mit 1 und soviel angehängten Nullen, als man der Zahl Paare von Nullen beigesetzt hat, oder man bezeichne die dadurch erhaltenen Ziffern der Wurzel durch das vorgesetzte Comma als Dezimalen.

Zusatz:

1^{tens}_{u}, Man braucht nicht der Zahl selbst, sondern kann gleich dem nach dem Verfahren im §. 113 davon bleibenden Reste ein Paar von Nullen, als nächste Klasse der Zahl, beisetzen.

Beispiel.

$\sqrt{212} = 14{,}5602197_{**}$; denn

$2|12$

$a^2 = 1$ und $a=1$;

112

$2a+b = (24)$ und $b=4$; denn nimmt man $11:2=5$, so wäre $b^2=25$ nicht mehr in den Rest $= 12$ enthalten.

$(2a+b)b = 96$

1600 (nach vorigem Zusatz).

$2a+b = (285)$ und $b=5$;

$(2a+b)b = 1425$

17500

$2a+b = (2906)$ und $b=6$;

$(2a+b)b = 17436$

6400

$2a = (2912)$ also $b=0$;

640000

$2a+b = (291202)$ und $b=2$;

$(2a+b)b = 582404$

5759600

$2a+b = (2912041)$ und $b=1$;

$(2a+b)b = 2912041$

284755900

$2a+b = (29120429)$ und $b=9$;

$(2a+b)b = 262083861$

2267203900

$2a+b = (291204387)$ und $b=7$;

$(2a+b)b = 2038430209$

228773691 u. s. w.

2tens, Man kann also alle Quadratwurzeln so nahe bestimmen, daß man sie als Rationalzahlen betrachten darf.

3tens, $\sqrt{(x \pm \sqrt{y})} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{(x^2-y)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x-\sqrt{(x^2-y)}}{2}}$

und $\sqrt{(A+B\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+B^2)}+A}{2}}$

$+\sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+B^2)}-A}{2}} \cdot \sqrt{-1}$; man kann daher aus jeder zweytheiligen Größe von der Form $x \pm \sqrt{y}$ und $\sqrt{(A+B\sqrt{-1})}$ hiernach die Quadratwurzel ziehen.

§. 115.

Aufgabe:

Aus einem Bruche oder einer gemischten Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1tens, Die gemischte Zahl verwandle man nach §. 44, 9tens, in einen Bruch;

2tens, ziehe, wenn der Nenner eine vollkommene Quadratzahl ist, aus Zähler und Nenner die Quadratwurzel; (nach §. 98, 2tens);

3tens, ist der Nenner keine vollkommene Quadratzahl, so multiplicire man Zähler und Nenner mit der Grundzahl des Nenners (indem man solchen, wenn er nicht schon als eine Potenz ausgedrückt ist, als eine solche ausdrückt) und ziehe dann aus Zähler und Nenner die Quadratwurzel, (nach Zus. 3 des §. 111); denn z. B.

$$\sqrt{\frac{a}{b^{2n+1}}} = \sqrt{\frac{ab}{b^{2n+2}}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^{2n+2}}} = \frac{\sqrt{ab}}{b^{n+1}};$$

und $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3}{2^3}} = \sqrt{\frac{6}{2^4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$;

Beispiele.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}; \sqrt{\frac{194}{4}} = \frac{\sqrt{194}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{194}}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\sqrt{25\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{203}{8}} = \sqrt{\frac{406}{16}} = \frac{\sqrt{406}}{4}; \sqrt{3\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2};$$

Zusatze:

1tens, Aus einem gegebenen Dezimalbrüche wird die Quadratwurzel gezogen, wenn man die Eintheilung der Ziffern in Klassen vom Comma anfängt, und wenn die letzte Klasse zur Rechten dadurch nur ein Ziffer erhält, solcher eine Null beifüget, außerdem wie (§. 113) bei ganzen Zahlen verfährt, und am Ende in der Wurzel so viele Ziffern als Dezimalen abschneidet, als man dergl: Klassen im Dezimalbruche hat. Z. B: $\sqrt{0,36} = 0,6.\sqrt{0,0144} = 0,12$; $\sqrt{193,21} = 13,9$. Die Richtigkeit dieses angegebenen Verfahrens geht daraus hervor, wenn man das Comma wegläßt und den Nenner darunter setzet.

2tens, Man kann daher auch jeden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln, um aus ihm die Quadratwurzel zu ziehen; z. B. $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{1,5}$; $\sqrt{25\frac{3}{8}} = \sqrt{25,375}$;

Fünfter Abschnitt.

Vom Cubus und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen.

§. 116.

Lehrsatz:

Wenn man eine zweytheilige Größe, z. B. $a+b$ oder $a-b$ nach §. 97, 3tens, durch Multiplication zum Cubus erhebt, so erhält man $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ oder $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$, d. i. der

Cubus einer zweytheiligen Größe besteht jederzeit aus dem Cubus des ersten Theils, dem 3fachen Produkte des Quadrats des ersten Theils in den zweyten Theil, dem 3fachen Produkte des ersten Theils in das Quadrat des zweyten Theils, und dem Cubus des zweyten Theils.

Zusaetze:

1tens, Wenn man eine zweytheilige Größe zum Cubus erheben will, so kann man sie daher nach dieser im Lehrsatze aufgestellten Formel $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dazu erheben; so ist z. B.

$10^3 = (6+4)^3 = 216 + 432 + 288 + 6 = 1000$; und

$10^3 = (12-2)^3 = 1728 - 864 + 144 - 8 = 1000$.

2tens, Ebenso läßt sich eine dreytheilige Größe nach dieser Formel zum Cubus erheben, wenn man die ersten zwey Theile als den ersten Theil $= a$, und den dritten Theil als den zweyten Theil $= b$ der Formel nimmt; z. B.

$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$;

denn nach §. 97, 3tens, ist $(a+b+c)^3 =$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 +$

$3bc^2 + c^3 =$

$(a+b)^3 + (3a^2 + 6ab + 3b^2)c + (3a+3b)c^2 + c^3 =$

$(a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$;

3tens, Desgleichen lassen sich nach der nemlichen Formel auf die nemliche Art, wie im vorigen Zus. vier- und mehrtheilige Größen zum Cubus erheben, wenn man immer die vorhergehenden Theile als den ersten $= a$ und den nachfolgenden Theil als den zweyten $= b$ der Formel nimmt, d. i. wenn man mit diesem weiteren Theile immer aufs Neue $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ zu dem schon bestimmten Cubus der vorigen Theile $= a$ bestimmt. Diese Formel ist daher eine allgemeine zur Cubus-Erhebung vieltheiliger Größen, und es müssen daher in einem vollkommenen Cubus vieltheiliger Größen alle die in der-

selben angegebenen Theile der einzelnen Theile dieser Größen enthalten seyn.

4tens, Will man daher eine Cubikwurzel aus einer vieltheiligen Größe ziehen, so darf man nur solche lexicographisch ordnen, und aus solcher nach dieser gegebenen Formel die einzelnen Theile a und b immer suchen; so ist zum

Beispiel.

1tens, $\sqrt[3]{(8x^3+12x^2y+6y^2x+y^3)}=2x+y$; denn man suche nach der Formel aus $8x^3=a^3$, a, so ist solches (n. §. 98, 1tens) $=2x$; und ziehe ab, so bleibt

$a^3=8x^3$ = = =

$12x^2y+6y^2x+y^3$; und nun bestimme man $12x^2y=3a^2b$ der Formel, $b=12x^2y:3a^2=12x^2y:12x^2=y$ und ziehe die Theile der Formel

$3a^2b=12x^2y$
—
$3ab^2=+6y^2x$
—
$b^3=+y^3$

ab, so sind dadurch alle Theile des Cubus erschöpft und also $2x+y$ die zwey Theile der Cubikwurzel.

$2^{\text{tens}}_{\text{n}}$, $\sqrt[3]{(\frac{1}{2\,1}x^3-\frac{4}{5}x^2y+16xy^2-64y^3+\frac{x^2z}{2}-12xyz+72y^2z+\frac{9xz^2}{4}-27yz^2+\frac{27z^3}{8})}=\frac{1}{3}x-4y+\frac{3}{8}z$;

$a^3=\frac{1}{2\,1}x^3$ = = = = = = = = und $a=\frac{1}{3}x$, und $3a^2=\frac{1}{3}x^2$, also $=\frac{4}{3}x^2y:\frac{1}{3}x^2=-4y=b$ und

$3a^2b=-\frac{4}{5}x^2y$ +

$3ab^2=+16xy^2$ −

$b^3=-64y^3$ +

} abgezogen, bleibt

$\frac{x^2z}{2}-12xyz+72y^2z+\frac{9xz^2}{4}-27yz^2+\frac{27z^3}{8}$; da nun $3a^2$ jetzt $=3(\frac{1}{3}x-4y)^2=3(\frac{x^2}{9}-\frac{8xy}{3}+16y^2)=\frac{x^2}{3}-8xy+48y^2$ und $\frac{x^2z}{2}:\frac{x^2}{3}=\frac{3}{2}z=b$, so ist der

dritte Theil der Wurzel $= \frac{3}{4}z$. Man ziehe daher jetzt wieder, $\frac{4}{3}x - 4y = a$ und $\frac{3}{4}z = b$ genommen, die Theile der Formel

$$\left.\begin{array}{rl} 3a^2b = & \frac{x^2z}{2} - 12xyz + 72y^2z \\ & - \quad + \quad - \\ 3ab^2 = & + \frac{9xz^2}{4} - 27yz^2 \\ & - \quad + \\ b^3 = & + \frac{27z^3}{8} \\ & - \end{array}\right\} ab, \text{ wodurch}$$

also die drey Theile der Wurzel, da kein Rest weiter bleibt, gefunden sind.

Anmerkung.

Die Anmerkung zu Zus. 4 und der Zus. 5 des §. 112 gelten auch in Beziehung des Cubus und der Cubikwurzel.

§. 117.

Lehrsatz:

Der Cubus einer Zahl besteht aus

1tens, nie mehr Ziffern, als der 3fachen Anzahl der Ziffern dieser Zahl;

2tens, nie weniger Ziffern, als der 3fachen Anzahl weniger 2 der Ziffern dieser Zahl; d. i. z. B. der Cubus einer Zahl von n Ziffern besteht aus 3n, 3n—1, oder 3n—2 Ziffern.

Beweis:

von 1tens, Die kleinste Zahl von zwey Ziffern ist 10 und deren Cubus = 1000 die kleinste Zahl von vier Ziffern, daher der Cubus eines Ziffers höchstens aus drey Ziffern bestehen kann; u. s. w.

von 2tens, und aus dem nemlichen Grunde hat der Cubus einer Zahl von zwey Ziffern wenigstens vier, d. i. 3.2—2 Ziffern; u. s. w.

Zusatz:

Theilt man daher eine Zahl von der rechten zur linken Hand in Klassen zu 3 Ziffern, so geben diese Classen die Anzahl der Ziffern ihrer Cubikwurzel; denn erhält man z. B. n Klassen, so besteht diese Zahl entweder aus 3n, 3n—1, oder 3n—2 Ziffern, je nachdem nemlich die letzte Klasse, drey, zwey, oder einen Ziffer hat, und enthält daher nach obigem Lehrsatz ihre Cubikwurzel jederzeit n Ziffern.

§. 118.

Lehrsatz:

Wenn man eine Zahl von zwey Ziffern a und b zum Cubus erhebt, so ist

1tens, der Cubus des ersten Ziffers a in der ersten Klasse der Cubikzahl (von der Linken zur Rechten), dann

2tens, das 3fache Produkt des Quadrats des ersten Ziffers a

in das zweyte b, im ersten Ziffer der zweyten und dem allenfallsgen Reste der ersten Klasse,

3tens, das dreyfache Produkt des ersten Ziffers a in das Quadrat des zweyten b, im zweyten Ziffer der zweyten Klasse und dem allenfallsgen Reste der drey vorangegangenen Ziffern, und

4tens, der Cubus des zweyten Ziffers, in dem dritten Ziffer und dem allenfallsgen Reste der ersten zwey Ziffern der zweyten Klasse dieser Cubikzahl enthalten.

Beweis:

Sind die Ziffern ohne Localwerth a und b, so ist die Zahl mit dem Localwerth $= 10a+b$, daher (nach §. 112, Zus. 1.) ist $(10a+b)^3 = 1000a^3 + 3.100a^2b + 3.10ab^2 + b^3$ und also

1tens, a^3 (da nach §. 117. a^3 aus einem, zweyen oder dreyen Ziffern besteht) in den Tausenden, oder in den Tausenden und Zehntausenden, oder auch in den Tausenden, Zehn- und Hunderttausenden, d. i. jederzeit in der ersten Klasse enthalten.

2tens, Da (nach §. 113) a^2 aus einem oder zwey Ziffern, folgl. $3a^2b$ aus ein (wenn $a^2b < 4$) oder aus zwey (wenn $a^2b \begin{matrix} > 3 \\ < 34 \end{matrix}$) oder aus drey (wenn $a^2b \begin{matrix} > 33 \\ < 334 \end{matrix}$) oder aus vier Ziffern (wenn $a^2b > 333$) bestehen kann, so ist $3a^2b$ in den Hunderten, oder in den Hunderten und Tausenden, oder in den Hunderten, Ein und Zehntausenden, oder in den Hunderten, Ein-, Zehn- und Hunderttausenden enthalten.

Da $a < 10$ und $b < 10$, so ist auch $3a^2b < 3000$ und kann daher $3a^2b$ nie mehr als 4 Ziffern haben.

3tens, Was von $3a^2b$ so eben gesagt wurde, gilt auch von $3ab^2$ und ist daher $3ab^2$ in den Zehnern oder in den Zehnern und Hunderten, oder in den Zehnern, Hunderten und Tausenden, oder in den Zehnern, Hunderten, Tausenden und Zehntausenden enthalten.

4tens Da (nach §. 117) b^3 aus ein bis drey Ziffern bestehen kann, so ist b^3 in den Einern, oder in den Einern und Zehnern, oder in den Einern, Zehnern und Hunderten enthalten.

Zusaetze:

1tens, Eben so folgt, daß wenn man eine dreyziffrige Zahl zum Cubus erhebt, der Cubus der beyden ersten Ziffern in den beyden ersten Klassen nach dem Lehrsatze, und wenn man nach §. 116, Zus. 2) die beyden ersten Ziffern $=a$ und das dritte Ziffer $=b$ setzet, $3a^2b$ in dem ersten Ziffer der dritten Klasse und (wenn h nicht $=0$) dem gebliebenen Reste der vorhergehenden 2 bis 5 Ziffern, $3ab^2$ in dem zweyten Ziffer und dem gebliebenen Reste der vorhergehenden 1 bis 4 Ziffern und b^3 in dem dritten Ziffer und dem gebliebenen Reste der vorhergehenden 0 bis 2 Ziffern der dritten Klasse enthalten.

2tens, Desgleichen ist, wenn man eine mehrziffrige Zahl zum Cubus erhebt, und einen oder mehrere Ziffern der Wurzel nach §. 116, Zus. 3, als a und das nächste Ziffer derselben als b der Formel nimmt;

A) $3a^2b$ in dem ersten Ziffer der, den a^3 enthaltenden n Klassen, nachfolgenden $(n+1)^{ten}$ Klasse und (wenn b nicht $= 0$) dem gebliebenen Reste der vorhergehenden (wenigstens $2n-2$ und höchstens $2n+1$) Ziffern,

B) $3ab^2$ in dem zweyten Ziffer dieser $(n+1)^{ten}$ Klasse und dem gebliebenen Reste von $n-1$ bis $n+2$ Ziffern,

C) b^3 in dem dritten Ziffer und dem gebliebenen Reste der vorhergehenden (höchstens 2) Ziffern enthalten.

3tens, Besteht a aus n Ziffern, so ist $a < 10^n$, und $b < 10$, folgl. $3a^2b < 3 \cdot 10^{2n} \cdot 10$ oder $3a^2b < 30 \cdot 10^{2n}$, d. i. besteht $3a^2b$ aus $2n+2$ Ziffern, so ist $3a^2b < 30$ mit noch $2n$ Nullen. Bleiben daher nach vorigem Zus. bei

der nten Klasse $2n+1$ Ziffern zum Reste, so können die zwey ersten Ziffern davon höchstens $=29$ seyn, indem $3ab^2+b^3$ zu $3a^2b$ addirt, dieses nicht in soweit vergrößert, daß solche $=30$ werden.

4tens, Wenn man daher eine vielziffrige Zahl nach Zus. des §. 117 in Klassen zu drey Ziffern theilt und von der ersten Klasse den nächst kleinern oder gleichen Cubus, und von der folgenden Klasse immer $3a^2b+3ab^2+b^3$ (nach 1ten und 2ten Zus.) der Formel in §. 116 abzieht, so bleiben, wenn das nächste $b>0$ ist,

bei der 2ten Klasse höchstens 5, wenigstens 2 Ziffern,
= = 3ten = = 7, = 4 =
= = 4ten = = 9, = 6 =
= = 5ten = = 11, = 8 =
u. s. w.
= = nten = = $2n+1$ = $2n-2$ =

wobei, wenn die meist möglichen Ziffern bleiben, die beyden ersten (nach 3ten Zus.) höchstens $=29$ seyn können.

5tens, Zur Bestimmung der Cubos einziffriger Zahlen dient folgende Tabelle, in welcher die zweyte Reihe die Cubi der ober ihnen stehenden Zahlen, oder was einerlei, in welcher die erste Reihe die Cubikwurzeln der unter ihnen stehenden Zahlen angiebt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729

§. 119.

Aufgabe:

Aus einer vier- bis sechsziffrigen Cubikzahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1tens, Man theile solche von der Rechten zur Linken in Klassen zu drey Ziffern (nach Zus. des §. 117), so enthält die Wurzel zwey Ziffern;

2tens, ziehe von der ersten Klasse (von der Linken zur Rechten) den ihr nach der Tabelle im 5ten Zus. des §. 118 nächst kleinern oder gleichen Cubus $= a^3$ ab; (nach 1tens des §. 118) und bestimme aus a^3 ebenfalls nach dieser Tabelle das erste Ziffer der Wurzel $= a$;

3tens, setze zu dem gebliebenen Reste die nächste zweyte Klasse, dividire mit dem 3fachen Quadrate des gefundenen ersten Ziffers der Wurzel, d. i. mit $3a^2$ in diese dadurch, jedoch ohne die zwey letzten Ziffern, erhaltene Zahl, so giebt der Quotient das zweyte Ziffer der Wurzel $= b$ und

4tens, ziehe $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 so von dieser ganzen Zahl nach Zus. 1 des §. 23. ab, daß das niedrigste Ziffer des ersten Produkts unter das dritte, das des zweiten unter das zweyte, und das des dritten unter das erste Ziffer dieser Zahl (von der Rechten zur Linken) dabei zu stehen kommt, (nach Lehrs. 2tens, 3tens und 4tens des §. 118), wodurch kein Rest mehr bleibt und die beyden Ziffern der Cubikwurzel gefunden sind. Z. B.

$\sqrt[3]{373248} = 72$; denn

373|248; nach 1tens,

$a^3 = 343$ und $a = 7$; nach 2tens,

30248, nach 3tens, und $302 : 3a^2 = 302 : 147$

$= 2 = b$.

$3a^2b = 294$

$3ab^2 = 84$ } nach 4tens.

$b^3 = 8$

§. 120.

Aufgabe:

Aus einer sieben und mehrziffrigen Cubikzahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1tens, Man theile solche in Klassen zu drei Ziffern (von der Rechten zur Linken), so enthält nach Zus. des §. 117 die Cubikwurzel soviel Ziffern, als man dadurch Klassen bekommen hat.

2tens, Bestimme aus den zwey ersten Klassen (von der Linken zur Rechten) nach §. 119 die beyden ersten Ziffern der Wurzel;

3tens, setze zu dem gebliebenen Reste die dritte Klasse, und verfahre, indem man die beyden gefundenen ersten Ziffern der Wurzel = a der Formel nimmt, wie im §. 119, 4tens, gesagt;

4tens, und sind noch mehr Klassen vorhanden, so setze das eben unter 3tens, angegebene Verfahren so lange fort, als dieß der Fall ist, indem man immer die schon gefundenen Ziffern der Wurzel = a der Formel nimmt.

5tens, Hat bei der nten Klasse der gebliebene Rest weniger als 2(n—1) Ziffern (Zus. 4 des §. 118) oder ist $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3, wenn man b=1 setzet; größer als der gebliebene Rest und die dazu gesetzte nächste Klasse, so ist b=0, welches man der Wurzel beifüget und die weiters nächste Klasse zu dem Reste setzet und wie nach 4tens, gesagt, wieder verfährt.

6tens, Aus dem vorhergehenden $3a^2$ erhält man das jetzige, wenn man Ersterem (2a+b) . 3b, indem man es um zwey Ziffern rechts ausrücket, addiret; d. i. ist das vorige $3a^2 = 12$, a = 2, und b = 4, so ist das jetzige

$3a^2$ = 12 +
$2a+b$ = (44) nach Anm. a zu 5tens des §. 112.
$(2a+b).3b$ = 528
$3a^2$ = 1728.

Beispiele.

1tens, $\sqrt[3]{1191016} = 106$; denn

1|191|016; nach 1tens,

$a^3 = 1$ und $a=1$

191

0 und $b=0$ } nach 2tens und 5tens.

191016; $1910 : 3a^2 = 1910 : 300 = 6 = b$;

$3a^2b = 1800$

$3ab^2 = 1080$ } nach 3tens und 4tens.

$b^3 = 216$

2tens, $\sqrt[3]{14886936} = 246$; denn

14|886|936;

$a^3 = 8$ und $a=2$;

6886

$3a^2 = (12)$ und $b=4$;

$3a^2b = 48$

$3ab^2 = 96$

$b^3 = 64$

1062936.

$3a^2 = (1728)$ und $b=6$;

$3a^2b = 10368$

$3ab^2 = 2592$

$b^3 = 216$

§. 121.

Aufgabe:

Aus einer Zahl, deren Cubikwurzel eine Irrationalzahl ist, diese Wurzel durch Annäherung zu bestimmen. (Anmerk. zu §. 116).

Auflösung:

Man hänge dieser Zahl Klassen von drey Nullen an, wodurch man soviele Dezimalen, als man dergleichen Klas-

sen beigefüget, in der Wurzel erhält, und verfahre außerdem wie im §. 120 bei Cubikzahlen.

Beweis:

Ist der nemliche, wie im §. 114; d. i. ist die Zahl = A,

so ist $A = \frac{10^{3n} A}{10^{3n}}$, folgl. $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{(10^{3n} A)}}{10^{n}}$;

Zusatz:

1tens, Man braucht nicht der Zahl selbst diese Klassen von Nullen anzuhängen, sondern kann zur Abkürzung dem, nach dem im §. 120 angegebenem Verfahren, davon bleibenden Reste und so jedem folgenden Reste immer drey Nullen als nächste Klasse beisetzen.

Beispiel.

$\sqrt[3]{2.3} = 2{,}843867\ldots$; denn

$a^3 =$	8	und $a = 2$,
	15000	
$3a^2 =$	(12)	und $b = 8$
$3a^2b =$	96	
$3ab^2 =$	384	
$b^3 =$	512	
	1048000	
$3a^2 =$	(2352)	und $b = 4$
$3a^2b =$	9408	
$3ab^2 =$	1344	
$b^3 =$	64	
	93696000	
$3a^2 =$	(241968)	und $b = 3$;
$3a^2b =$	725904	
$3ab^2 =$	7768	
$b^3 =$	27	
	21028893000	
$3a^2 =$	(24247947)	und $b = 8$
$3a^2b =$	193983576	
$3ab^2 =$	545856	
$b^3 =$	512	
	16250763280000	
$3a^2 =$	(2426159532)	und $b = 6$;
$3a^2b =$	14556957192	
$3ab^2 =$	3071304	
b^3	216	
	169349895544000	
$3a^2 =$	242626190988	und b beinahe $= 7$.

2tens, Man kann also Cubikwurzeln so nahe bestimmen, daß man sie als Rationalzahlen betrachten darf.

§. 122.

Aufgabe:

Aus einem Bruche oder einer gemischten Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1tens, Man verwandle die gemischte Zahl nach §. 44, 9tens, in einen Bruch;

2tens, ziehe, wenn der Nenner eine Cubikzahl ist, aus Zähler und Nenner die Cubikwurzel; (nach §. 98, 2tens);

3tens, ist der Nenner keine Cubikzahl, so multiplicire man Zähler und Nenner mit derjenigen Potenz des Nenners, wodurch der Nenner eine Cubikzahl wird, (nach Zus. 3 des §. 111), und ziehe dann aus beyden Produkten die Cubikwurzel; denn z. B. $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{(ab)}}{b}; \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{(ab^2)}}{b};$$

Beispiele.

$$\sqrt[3]{\frac{500}{8}} = \frac{\sqrt[3]{500}}{2}; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}; \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{(3.4)}}{2} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}; \quad \sqrt[3]{25\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{203}{8}} = \frac{\sqrt[3]{203}}{2}.$$

Zusätze:

1tens, Aus einem gegebenen Dezimalbruche wird die Cubikwurzel gezogen, wenn man die Eintheilung der Ziffern in Klassen vom Comma anfängt, und wenn die letzte Klasse zur Rechten dadurch keine drey Ziffern erhält, solche durch beigefügte Nullen ergänzt, außerdem wie (§. 120 oder 121) bei ganzen Zahlen verfährt, und am Ende in der Wurzel soviele Dezimalen abschneidet, als man dergleichen Klassen im Dezimalbruche hat; z. B.

$\sqrt[3]{0,027}=0,3$; $\sqrt[3]{0;001728}=0,12$; $\sqrt[3]{1,728}=1,2$; $\sqrt[3]{0,000027}=0,03$.

2tens, Man kann daher auch jeden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln, um alsdann ihm die Cubikwurzel zu ziehen.

Sechster Abschnitt:

Vom Biquadrate und der Biquadratwurzel vieltheiliger Größen.

§. 123.

Lehrsatz:

Wenn man eine zweytheilige Größe, z. B. $a \pm b$ durch Multiplication zum Biquadrate erhebt, so ergiebt sich, daß das Biquadrat einer zweytheiligen Größe

1tens, aus dem Biquadrate des ersten Theils,

2tens, dem 4fachen Produkte des Cubus des ersten in den zweiten Theil,

3tens, = 6 = = des Quadrats des ersten in das Quadrat des zweiten Theils,

4tens, = 4 = = des ersten in den Cubus des zweyten Theils, und

5tens, = Biquadrate des zweyten Theils

besteht, d. i. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Zusätze:

1tens, Man kann demnach jede zweytheilige Größe zum Biquadrate erheben, wenn man entweder das Quadrat derselben zum Quadrate (nach §. 97, 4tens) oder wenn man sie sogleich nach der obigen Formel zum Biquadrate erhebt.

2tens, Ebenso kann man eine dreytheilige Größe nach dieser Formel erheben, wenn man dem Biquadrate der beyden

ersten Theile, diese zwey Theile als a und den dritten als b der Formel genommen, wieder $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ beifüget.

3tens, Desgleichen kann man eine vier- oder mehrtheilige Größe zum Biquadrate erheben, wenn man immer dem Biquadrate der vorigen Theile, diese als a und den weiteren Theil als b der Formel genommen, wieder $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ beisetzet.

4tens, In einem vollkommenen Biquadrate oder einer Biquadratzahl müssen daher auch alle Glieder der einzelnen Theile der Wurzel nach dieser Formel enthalten seyn, und man kann daher auch hiernach so, wie im §. 112 bei dem Quadrate und in §. 116 bei dem Cubus gezeigt, die 4te Wurzel aus dem Biquadrate ziehen.

§. 124.

Lehrsatz:

Das Biquadrat einer Zahl besteht aus

1tens, nie mehr Ziffern, als der 4fachen Anzahl der Ziffern dieser Zahl, und aus

2tens, nie weniger als der 4fachen Anzahl dieser Ziffern weniger 3.

d. i. z. B. das Biquadrat einer Zahl von n Ziffern hat 4n—3 bis 4n Ziffern.

Beweis:

Nach §. 113. Aufl. 1tens, hat das Quadrat einer Zahl von n Ziffern 2n—1 bis 2n Ziffern, daher das Quadrat einer Zahl von 2n—1 bis 2n Ziffern, oder das Biquadrat einer Zahl von n Ziffern hat 2(2n—1)—1 bis 2 (2n), d. i. 4n—3 bis 4n Ziffern.

Oder: er ist der nemliche, wie der vom Cubus im §. 117.

Zusatz:

Theilt man daher eine Zahl von der Rechten zur Linken

in Klassen zu vier Ziffern, so giebt die Anzahl dieser Klassen die Anzahl der Ziffern ihrer Biquadratwurzel.

§. 125.

Lehrsatz:

Wenn man eine Zahl von zwey Ziffern a und b, d. i. mit Berücksichtigung des Localwerths (10a+b) zum Biquadrate erhebt, so giebt dieß

$$10000a^4+1000.4a^3b+100.6a^2b^2+10.4ab^3+b^4;$$

es wird daher eine zweyziffrige Zahl nach der Formel $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ zum Biquadrate erhoben, wenn man das erste Ziffer (die Zehner) $=a$ und das zweyte $=b$ der Formel nimmt, die Theile dieser Formel dann so unter einander setzt, daß der nächste immer um eine Stelle mehr rechts steht, und sie dann so addirt.

Zusaetze:

$1^{tens}_{\ \ n}$, Es ist also bei dem Biquadrate einer zweyziffrigen Zahl, das niedrigste Ziffer von

a^4 in dem letzten Ziffer der ersten Klasse,

$4a^3b^3$ = = 1ten = = zweyten =

$6a^2b^2$ = = 2ten = = = =

$4ab^3$ = = 3ten = = = =

b^4 = = 4ten = = = =

(von der Linken zur Rechten) dieses Biquadrats enthalten.

$2^{tens}_{\ \ n}$, Nimmt man bey dem Biquadrate einer dreyziffrigen Zahl die zwey ersten Ziffern $=a$, und das dritte $=b$ der Formel, so ist a^4 in den beyden ersten Klassen nach $1^{tens}_{\ \ n}$, die weiteren Theile aber so in dem Biquadrate enthalten, daß das niedrigste Ziffer derselben immer ebenso, wie es unter $1^{tens}_{\ \ n}$, on der zweyten Klasse gesagt, nun in der dritten Klasse enthalten ist.

$3^{tens}_{\ \ n}$, Ebenso ist bei dem Biquadrate einer vier- und mehrziffrigen Zahl, wenn man mehrere Ziffern derselben $=a$ und das nächste $=b$ nimmt immer das niedrigste Zif-

fer von $4a^3b^3$, $6a^2b^2$, $4ab^3$, und b^4 so wie es unter 1^{tens} angegeben, in der Klasse enthalten, welche jenen nachfolgt, so a^4 in sich fasset.

4^{tens}, Man kann daher auch nach dieser Formel, wie bei der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel gelehret, aus jeder Zahl die Biquadratwurzel ziehen, und

5^{tens}, es besteht der Rest bei der nten Klasse aus höchstens $3n+1$ und wenigstens $3n-3$ Ziffern, wenn das nächste $b>0$ ist; auch sind die beyden ersten Ziffern bei einem dergl. größten Reste < 40. (Zus. 2 und 3 des §. 113 und des §. 118).

Siebenter Abschnitt.

Von der fünften Potenz und der fünften Wurzel vieltheiliger Größen.

§. 126.

Lehrsatz:

Wenn man eine zweytheilige Größe $a+b$ oder $a-b$ zur 5ten Potenz durch Multiplication erhebt, so erhält man $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ oder $a^5+5a^4(-b)+10a^3(-b)^2+10a^2(-b)^3+5a(-b)^4+(-b)^5$, und es besteht daher die 5te Potenz einer zweytheiligen Größe aus

1^{tens}, der 5ten Potenz des ersten Theils.

2^{tens}, dem 5fachen Produkte des Biquadrats des ersten in den zweyten Theil,

3^{tens}, = 10 = = des Cubus des ersten in das Quadrat des zweyten Theils,

4^{tens}, = 10 = = des Quadrats des ersten in den Cubus des zweyten Theils,

5^{tens}, = 5 = = des ersten in das Biquadrat des zweyten Theils, und

6^{tens}, der 5ten Potenz des zweyten Theils dieser Größe.

Zusaetze:

1tens, Man kann daher auch eine dreytheilige Größe nach dieser Formel zur 5ten Potenz erheben, wenn man die beyden ersten Theile nach dieser dazu erhebt, und dann hiezu, diese beyden Theile als a und den dritten Theil als b der Formel genommen, wieder die im Lehrsatze unter 2tens bis 6tens aufgeführten Theile addiret.

2tens, Ebenso kann man eine vier- und mehrtheilige Größe zur 5ten Potenz erheben, wenn man immer der 5ten Potenz der vorigen Theile wieder, diese Theile als a und den nächsten als b der Formel genommen, die im Lehrsatze unter 2tens bis 6tens aufgeführten Theile beisetzet.

3tens, In der 5ten Potenz einer vieltheiligen Größe müssen daher auch alle diese im Lehrsatze aufgeführten Theile enthalten seyn, und man kann daher auch hiernach, wie bey dem Quadrate und dem Cubus gezeiget die 5te Wurzel aus einer vieltheiligen Größe ziehen.

§. 127.

Lehrsatz:

Die 5te Potenz einer Zahl hat

1tens, nie mehr Ziffern als die 5fache Anzahl der Ziffern derselben und

2tens, nie weniger als die 5fache Anzahl dieser Ziffern weniger vier.

Beweis:

Ist derselbe wie bei dem Cubus.

Zusatz:

Theilt man daher eine Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu fünf Ziffern, so giebt die Anzahl dieser Klassen die Anzahl der Ziffern ihrer 5ten Wurzel.

§. 128.

Lehrsatz:

Wenn man eine zweyziffrige Zahl $10a+b$ zur 5ten Potenz erhebt, so giebt dies $100000a^5+10000.5a^4b+1000.10a^3$

$b^2 + 100.10a^2b^3 + 10.5ab^4 + b^5$ und es ist daher das niedrigste Ziffer von

$1^{tens}_{"}$,	a^5	in dem	letzten	Ziffer	der	ersten	Klasse	
$2^{tens}_{"}$,	$5a^4b$	=	=	1ten	=	=	zweiten	=
$3^{tens}_{"}$,	$10a^3b^2$	=	=	2ten	=	=	=	=
$4^{tens}_{"}$,	$10a^2b^3$	=	=	3ten	=	=	=	=
$5^{tens}_{"}$,	$5ab^4$	=	=	4ten	=	=	=	=
$6^{tens}_{"}$,	b^5	=	=	5ten	=	=	=	=

(von der Linken zur Rechten) dieser 5ten Potenz enthalten.

Zusaetze:

$1^{tens}_{"}$, Ebenso ist, wenn man eine mehrziffrige Zahl zur 5ten Potenz erhebt, die 5te Potenz der beyden ersten Ziffern immer in den beyden ersten Klassen nach dem Lehrsatze, dann, wenn man diese beyden ersten Ziffern als den ersten Theil = a, und das dritte Ziffer als den zweyten Theil = b der Formel nimmt, wieder das niedrigste Ziffer der in dem Lehrsatze unter $2^{tens}_{"}$ bis $6^{tens}_{"}$, aufgeführten Theile in eben derselben Art in der dritten Klasse enthalten; und so fort sind, wenn man immer die vorhergehenden Ziffern = a und das nächste = b der Formel nimmt, diese Theile jederzeit in der Klasse enthalten, welche jenen nachfolgt, so a^5 in sich fassen.

$2^{tens}_{"}$, Man kann daher auch nach dieser Formel wie bei der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel gelehret, aus einer mehrziffrigen Zahl die 5te Wurzel ziehen, und

$3^{tens}_{"}$, es besteht auch der Rest bei der nten Klasse, wenn das nächste $b > 0$, höchstens aus $4n+1$, (wovon die beyden ersten Ziffern < 50) und wenigstens aus $4n-4$ Ziffern, (wie im 2ten und 3ten Zus. des §. 113 und des §. 118).

Achter Abschnitt.

Von der sechsten Potenz und der sechsten Wurzel vieltheiliger Größen.

§. 129.

Lehrsatz:

Die sechste Potenz einer Größe, ist dem Quadrate des Cubus dieser Größe oder dem Cubus des Quadrats dieser Größe gleich, denn z. B. $a^6 = (a^3)^2 = (a^2)^3$; man kann daher eine vieltheilige Größe zur sechsten Potenz erheben, wenn man solche nach dem vierten Abschnitte zum Quadrate und dieses dann nach dem fünften Abschnitte zum Cubus erhebt, oder umgekehrt; und ebenso kann man die sechste Wurzel aus einer vieltheiligen Größe oder Zahl ziehen, wenn man aus deren Cubikwurzel wieder die Quadratwurzel ziehet oder umgekehrt.

Zusatze:

1tens, Man kann dieses aber auch nach der Formel, die man durch Multiplication erhält, indem hiernach $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$, wie bei der vierten und fünften Potenz gelehret, bewerkstelligen.

2tens, Ebenso kann man sich durch Multiplication für jede höhere Potenz einer zweytheiligen Größe (binomium) eine Formel zur Potenzerhebung und Wurzelausziehung bilden, auch kann man hierüber aus den bisherigen Formeln einen allgemeinen Lehrsatz, d. i. den binomischen Lehrsatz ableiten.

IV.

Von der Algebra.

Erster Abschnitt.

Von den Gleichungen im Allgemeinen.

§. 130.

Erklärungen:

1tens, Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck einerlei Größe oder Werthes, so sind z. B. $4+3=7$; $5+2=10-3$; $2a-b=3a+b-a-2b$; Gleichungen.

2tens, Eine Gleichung heißt analytisch, wenn die Gleichheit der beyden Ausdrücke durch ihre Bezeichnung schon hervorgeht, hingegen algebraisch, wenn die Gleichheit derselben erst aus dem Werthe der darin vorkommenden unbestimmten Größen hervorgeht, z. B. $3x=21$ ist blos dann eine Gleichung, wenn $x=7$ ist, aber $2a-b=3a+b-a-2b$ bleibt immer eine Gleichung, man mag für a und b jeden beliebigen Werth setzen.

Sind die beyden Ausdrücke ein und dieselben, wie z. B. $a+b=a+b$, so heißt die Gleichung identisch.

3tens, Die Lehre der Umwandlung der Formen analytischer Gleichungen ist die Analysis der Neuern und die der algebraischen Gleichungen die Analysis der Alten.

4tens, Die Algebra lehret die Bildung der Gleichungen aus denen in einer Rechnungs-Aufgabe zur Bestimmung einer oder mehrerer unbekannten Größen gegeben werden den Bedingungen, (indem man diese unbekannten Größen als gleichsam bekannt annimmt, sie nemlich $=x,y,z$ u. s. w. setzet), und giebt an, wie man dann den Werth

derselben aus diesen Gleichungen findet; sie begreift daher die Analysis der Alten in sich.

5tens, Die auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichen sich befindenden Größen einer Gleichung nennt man die Seiten und die durch die Zeichen + oder — verbundenen Größen einer Seite, die Glieder der Gleichung; so ist bei den Gleichungen in der ersten Erklärung 4+3 oder 5+2 die eine, dann 7 oder 10—3 die andere Seite, dann 4 und 3 die Glieder der einen, und 7 das Glied der andern Seite der Gleichung.

6tens, Die Glieder einer Gleichung heißen algebraische, wenn sie durch Multiplication, Division, Potenzerhebung oder Wurzelausziehung entstanden, und transcendentische, wenn sie blos durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden können; man unterscheidet hiernach auch transcendentische Gleichungen.

7tens, Die unbekannte Größe ist in einer algebraischen Gleichung die Hauptgröße; man unterscheidet daher solche nach Gleichungen mit einer, zweyen, dreyen oder mehreren unbekannten (verschiedenen) Größen, dann, je nachdem die unbekannte Größe, wenn sie auf eine Seite alleine gebracht ist, ohne daß der sich dadurch ergebende Exponent weggeschaffet wurde, nun als eine Wurzelgröße oder Potenz erscheint, nach Gleichungen von dem Grade des höchsten Exponenten dieser Wurzelgröße oder Potenz.

8tens, Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe nach 7tens, die erste Potenz übersteigt, nennt man überhaupt zusammengesetzte oder höhere Gleichungen, und wenn sie als einfache Größe vom ersten Grade erscheinet, einfache Gleichungen.

9tens, Eine Gleichung mit einer unbekannten Größe nennt man eine bestimmte, mit zweyen oder mehreren unbekannten Größen, eine unbestimmte Gleichung, weil bei Letzterer der Werth der unbekannten Größen verschieden seyn kann.

10tens „ Eine Gleichung, aus welcher sich ergiebt, daß die unbekannte Größe x=x ist, also jeden Werth haben kann, heißt eine derivative; und Gleichungen, die sich gegenseitig widersprechen, heißen limitirende.

11tens „ Eine unbestimmte Gleichung wird dadurch in ihrem Grade bestimmt, daß man die höchsten Exponenten der unbekannten Größen eines Gliedes derselben zusammen addiret.

12tens „ Zusammengesetzte Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe nur in einer Dignität nach 7tens „ erscheinet, nennt man reine, und zwar nach dieser Dignität, quadratische, cubische, biquadratische Gleichung oder Gleichung vom 2ten, 3ten, 4ten Grade u. s. w.; und solche, in welchen die unbekannte Größe mit verschiedenen Exponenten vorkömmt, nach dem höchsten Exponenten derselben, gemischte quadratische, cubische, ꝛc. Gleichung.

13tens „ Eine gemischte Gleichung heißt irrational, wenn die unbekannte Größe in einem oder mehreren Gliedern derselben, als Wurzelgröße, oder was einerlei, als Potenz mit gebrochenen Exponenten vorkömmt, außerdem aber rational; dann vollständig, wenn in ihr die unbekannte Größe vom höchsten bis zum ersten Grade derselben, enthalten ist, außerdem unvollständig; und geordnet, wenn deren Glieder so geordnet sind, daß die Exponenten nach dieser Angabe auf einander folgen, wobei man, wenn sie nicht vollständig sind, die fehlenden Glieder mit einem Sternchen bezeichnet.

14tens „ Den Werth der unbekannten Größe nennt man die Wurzel der Gleichung und muß solche für die unbekannte Größe gesetzt, die Gleichung nicht verändern, welches ihre (der Wurzel) Richtigkeit beweiset.

15tens „ Eine Aufgabe nennt man bestimmt, wenn jede aus ihr zu suchende, also unbekannte Größe nur einen Werth haben kann, hingegen unbestimmt oder diophantisch, wenn sie verschiedene Werthe haben kann.

Zusatze:

1tens, Eine Aufgabe ist bestimmt, wenn sie so viele algebraische Gleichungen, von welchen keine von der andern abgeleitet ist, giebt, als unbekannte Größen vorhanden sind, denn es sind (nach dritten Abschnitt, B.) diese Gleichungen dann durch einander bestimmte; hingegen ist die Aufgabe, wenn eine oder mehrere Gleichungen weniger gegeben sind und sich für die unbekannten Größen mehrere Werthe finden lassen, unbestimmt. Abgeleitet von einander sind z. B. die 4 Gleichungen $x+y=8$; $3x=24-3y$; $(x+y)^2=64$; $\sqrt[3]{(x+y)}=2$; und daher zur Bestimmung unbekannter Größen einer Aufgabe nur als eine Gleichung zu betrachten.

2tens, Bei allgemeinen Aufgaben nimmt man für bekannte Größen die ersteren Buchstaben des Alphabets, a,b,c ꝛc. und für unbekannte die letzteren, x, y, z ꝛc.

3tens, Jedes Verhältniß gleichartiger Größen läßt sich auf ein Verhältniß bloser Zahlen reduziren, und das Verhältniß zweyer Zahlen ist durch ihren Quotienten bestimmt, (nach §. 16, 5tens). Zwey Zahlen haben daher mit zwey anderen gleiches Verhältniß, wenn sie gleichen Quotienten geben, z. B. a zu b verhält sich wie ax zu bx, oder wie $\frac{a}{b}x$ zu x, oder wie x zu $\frac{b}{a}x$, und es ist daher auch eine unbekannte Zahl durch das Verhältniß zu bekannten, bestimmt.

4tens, Wenn ein Verhältniß durch zwey oder mehrere Verhältnisse zugleich bestimmt ist, so ist es daher ebensoviel, als wenn es durch deren Produkt bestimmt ist, denn es ist dieses nach 4ten Zus. des §. 56 von dem Quotienten der Fall.

Sollen sich also zwey Zahlen x und y sowohl wie a zu b, als auch wie c zu d verhalten, so müssen sie sich

wie ac zu bd verhalten, d. i. es muß $y = \frac{bd}{ac} x$ seyn. Ein dergleichen bestimmtes Verhältniß nennt man ein zusammengesetztes.

Zweyter Abschnitt.

Von der Bildung der Gleichungen aus den algebraischen Aufgaben.

§. 131.

Lehrsatz:

Die Bildung der Gleichungen aus denen in einer Aufgabe für die unbekannten oder zu suchenden Größen gegebenen Bedingungen beruhet vorzüglich darauf, daß man diejenigen unbekannten Größen, wodurch sich alle übrigen durch die gewöhnlichen Rechnungsoperationen leicht finden lassen, aufsuchet, diese $= x, y, z$, u. s. w. setzet und dann die Gleichungen hiernach formiret.

Wie solches geschiehet, wird durch Beispiele am Besten gezeigt werden, daher folgende

Beispiele.

1.

Was mag dieß für eine Zahl seyn, welche eben dieselbe Größe giebt, man mag sie durch 10 multipliciren oder 10 dazu addiren?

Auflösung:

Ist diese Zahl $= x$, so ist

x multiplicirt mit 10, ebensoviel als x addirt zu 10;

das ist algebraisch:

$$x \times 10 = x + 10;$$

welches uns also die Gleichung

$$10x = x + 10$$

und der hieraus zu berechnende Werth von x, die verlangte Zahl giebt; (siehe §. 140.)

2.

Drey Personen sind zusammen 96 Jahre alt, B ist 2 Jahre älter als A, und C ist 4 Jahre älter als A und B zusammengenommen. Wie alt ist Jeder?

Auflösung:

Bei dieser Aufgabe erhellet, daß, wenn man das Alter des Einen weiß, man auch leicht das Alter des Andern findet, und man nimmt daher zur Bildung der Gleichung das Alter des Einen, z. B. vom Jüngsten, also vom A als bekannt, nemlich $= x$ Jahre an, wo dann B so alt als A und noch 2 Jahre alt, also $x+2$ Jahre alt ist, und C so alt als A und B und noch 4 Jahre, also $x+x+2+4$ Jahre alt ist. Nun sind alle drey 96 Jahre alt, aber auch nach diesen Bedingungen $x+(x+2)+(x+x+2+4)$ Jahre alt, es muß also

$$x+(x+2)+(x+x+2+4) = 96;$$

seyn, welches die gefundene Gleichung ist und aus welcher der Werth von x das Alter des A giebt, aus welchem sich das Alter des B und C leicht finden läßt.

3.

Ein Mann ist jetzt 46 Jahre und sein Sohn 13 Jahre alt. In wie viel Jahren wird dieser nur noch einmal so alt seyn, als sein Sohn?

Auflösung:

Ist dieß in x Jahren der Fall, so ist dann der Vater 46 und x Jahre, der Sohn 13 und x Jahre alt, und dieses Alter des Vaters ist diesem Alter des Sohnes doppelt genommen, gleich, also

$$46+x = 2(13+x),$$

wo der gefundene Werth von x die Zahl der Jahre angiebt, welche jeder noch zu leben hat, bis der verlangte Fall eintritt.

4.

An einer Uhr ist der Stundenzeiger 15 Minuten dem Minutenzeiger voraus. Wann wird bei dem gesetzlichen Uhrgange der Letztere den Erstern einholen?

Auflösung:

Geschieht dieß in x Minuten, so hat der Stundenzeiger, welcher schon 15 Minuten gemacht hatte, noch $\frac{x}{12}$ Minuten bis dahin gemacht, denn er legt nur den 12ten Theil des Wegs zurück, den der Minutenzeiger macht; folgl. da Letzterer den Ersteren bis dahin einholen d. i. Beyde gleichviel Minuten vom Standpunkt des Letztern aus, gemacht haben sollen, so muß dann

$$x = 15 + \frac{x}{12}$$

seyn, wo der sich hieraus ergebende Werth von x diese Minutenzahl angiebt.

5.

In einer Familie waren Kinder. Auf die Frage, wie groß ihre Zahl seye, antwortete ein Sohn: ich habe so viele Schwestern als Brüder, und eine Tochter sagte: sie hätte nur halb soviel Schwestern als Brüder. Wie viel waren es nun Kinder?

Auflösung:

Aus dieser Aufgabe ersieht man, daß man sowohl die Anzahl der Söhne als die der Töchter wissen muß, um die Frage beantworten zu können.

Waren es nun x Söhne und y Töchter, so hatte der Sohn y Schwestern und x—1 Brüder, weil er, als nicht zu seinen Brüdern gehörig, bei der Anzahl derselben von der Zahl der Söhne mit 1 abzuziehen ist; und aus eben dem Grunde hatte die Tochter x Brüder und y—1 Schwestern.

Ferner soll nach der Aufgabe:

$y = x - 1$; d. i. die Anzahl der Schwestern vom Sohne gleich der Anzahl seiner Brüder seyn; und

$x = 2(y-1)$; d. i. die Anzahl der Brüder von der Tochter gleich der doppelten Anzahl ihrer Schwestern seyn.

Der aus diesen beyden Gleichungen gefunden werdende

Werth von x giebt die Anzahl der Söhne und der von y die Anzahl der Töchter, folgl. beyde zusammen die Anzahl der Kinder dieser Familie an.

6.

Zwey Leute hatten Nüsse. A sagte zu B, gieb mir 2 von deinen, so haben wir dann Beyde gleichviel; B antwortete: gieb mir 2 von deinen, so habe ich noch einmal so viel als du behältst. Wie viel hatte ein Jeder gehabt?

Auflösung:

Hatte A, x und B, y Nüsse, so ist nach der vom A verlangten Mittheilung

x und 2 Nüsse gleich y weniger 2 Nüsse.

d. i. I.) $x + 2 = y - 2$;

und nach der vom B verlangten Abgabe

y und 2 Nüsse doppelt soviel als x weniger 2 Nüsse

d. i. II.) $y + 2 = 2(x - 2)$;

aus welchen beyden Gleichungen der Werth von x und y die Anzahl der Nüsse des A und B giebt.

7.

Es giebt einen Bruch, wenn man 1 vom Zähler abnimmt, so wird er $\frac{1}{4}$ und wenn man 1 vom Nenner abzieht, so wird er $\frac{1}{3}$. Welches ist der Bruch?

Auflösung:

Ist der Bruch $= \frac{x}{y}$, so ist nach der Aufgabe

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{4} \text{ und } \frac{x}{y-1} = \frac{1}{3};$$

aus welchen zwey Gleichungen der Werth von x und y also auch der des Bruches $\frac{x}{y}$ berechnet wird.

8.

Eine zweyziffrige Zahl aus dem decadischen System zu finden, welche das Vierfache der Summe ihrer Ziffern ausmacht, und wenn man zu der zweyziffrigen Zahl 18 addirt,

es ebensoviel ist, als wenn man die Stellen ihrer Ziffern verwechselte. Welches ist diese Zahl?

Auflösung:

Ist das erste Ziffer $= x$ und das zweyte $= y$, so ist die Zahl $= 10x + y$ und wenn man die Stellen der Ziffern verwechselt $= 10y + x$, weil das erste Ziffer einer zweyziffrigen Zahl immer ein Zehner ist.

Ferner ist nach der Aufgabe:

$$10x + y = 4(x + y); \text{ und } 10x + y + 18 = 10y + x;$$

woraus sich der Werth von x und y, also die zweyziffrige Zahl berechnen läßt.

9.

Es bekam Jemand 100 fl. in Kronenthalern zu $2\frac{7}{10}$ fl. in Conventionsthalern zu $2\frac{2}{5}$ fl. und in 24 kr. Stücken zu $\frac{2}{5}$ fl. ausbezahlt, wobei er fand, daß es auch gerade 100 Stücke waren. Wie viel bekam er von jeder Sorte Stücke?

Auflösung:

Waren es x Krthlr., y Conventthlr., und z 24 kr. Stücke, so machen

1^{tens}, sämmtliche Stücke 100 aus, d. i. $x + y + z = 100$;

2^{tens}, der Werth dieser Stücke in Gulden ausgedrückt ist 100 fl., d. i.

$$2\tfrac{7}{10}x + 2\tfrac{2}{5}y + \tfrac{2}{5}z = 100;$$

Aus diesen beyden Gleichungen wird die Anzahl der hiezu nöthigen Stücke gefunden.

10.

Die ganze Zahl zu finden, die durch

2 dividirt, 1 zum Reste läßt,
3 = , 2 = = = , =
4 = , 3 = = = , =
5 = , 4 = = = , =
6 = , 5 = = = , =
7 = , 0 = = = .

Auflösung:

Die Zahl oder der Dividend ist dem Produkte des Quo-

tienten mit dem Divisor, hiezu den Rest addirt, gleich; sind daher die Quotienten, welche sich durch die angegebene Division ergeben, der Ordnung nach, u, v, w, x, y, z, so ist die Zahl $= 2u+1 = 3v+2 = 4w+3 = 5x+4 = 6y+5 = 7z$, woraus sich der in ganzen Zahlen verlangte Werth der Zahl finden läßt.

11.

Harpax zählte seine Ducaten in ein Quadrat auf. Das Quadrat war voll und es waren noch 284 Stücke übrig. Hierauf legte er einen Ducaten mehr in jede Reihe und es fehlten ihm zur Vervollständigung dieses Quadrats noch 25 Stücke. Wie viele Ducaten hatte er?

Auflösung:

Weiß man, wie viele Stücke er in eine Reihe legte, um aus seinen Ducaten ein Quadrat zu machen, so findet man auch leicht deren Anzahl. Legte er nun das erstemal x Stücke in eine Reihe, so legte er das zweytemal $(x+1)$ Stücke in eine Reihe, demnach das erste Quadrat $x.x$, und das zweyte, wenn es voll wäre, $(x+1).(x+1)$ Stücke enthielte, und also nach der Angabe

$$x.x+284 = (x+1).(x+1) - 25 \text{ ist,}$$

woraus sich der Werth von x und der von $x.x+284$ als seinen gehabten Ducaten berechnen läßt.

12.

Jemand kaufte Waare, den netto Centner zu 27 fl., woran die tara auf den netto Cntr. soviel Pfund betrug, als die Waare brutto Cntr. wog; ein andermal kaufte er 1 brutto Cntr. weniger, den netto Cntr. zu 33 fl.; wobei auf den netto Cntr. die tara 2 Pfd. mehr betrug, als das erstemal. Die tara war in beyden Fällen frei, und er mußte das zweytemal 10 fl. mehr als das erstemal bezahlen. Wie viel Cntr. kaufte er jedesmal.

Aufloesung:

Kaufte er das erstemal x brutto Cntr., so kaufte er das zweytemal $(x - 1)$ brutto Cntr., und die tara betrug das erstemal auf den netto Cntr. x Pfd., und das zweytemal

$(x+2)$ Pfd.; im ersten Falle kosten also $(100+x)$ brutto Pfd. soviel als 100 netto Pfd., d. i. 27 fl., daher $(100+x)$ brutto Cntr. 2700 fl.; also 1 brutto Cntr. $\frac{2700}{100+x}$ fl. und die gekauften x brutto Cntr. $\frac{2700}{100+x}$ x fl.; im zweyten Falle kosten aber $(100+x+2)$ brutto Pfd. soviel als 100 netto Pfd., d. i. 33 fl.; daher $(102+x)$ brutto Cntr. 3300 fl., also ein brutto Cntr. $\frac{3300}{102+x}$ und die erhaltenen $(x-1)$ brutto Cntr. $\frac{3300}{102+x} \cdot (x-1)$ fl. Da nun

$$\frac{2700}{100+x} \cdot x = \frac{3300}{102+x}(x-1) - 10$$

seyn soll, so läßt sich hieraus der Werth von x, und daraus der des jedesmal gekauften netto Gewichts berechnen, indem er das erstemal bei $(100+x)$ brutto Pfd. immer 100 netto Pfd., also bei 1 Pfd. brutto immer $\frac{100}{100+x}$ Pfd. und bei x Cntr. daher $\left(\frac{100}{100+x} \cdot x\right)$ Cntr. erhielt; dann das zweytemal bei $(102+x)$ brutto Cntr. immer 100 netto Cntr., also bei 1 brutto Cntr. immer $\frac{100}{102+x}$. und daher bei $(x-1)$ brutto Centner $\frac{100}{102+x} \cdot (x-1)$ netto Cntr. empfieng und bezahlte.

Anmerkung.

Die Werthe der unbekannten Größen aus den bei vorstehenden Aufgaben aufgefundenen Gleichungen sind im §. 140 berechnet.

Dritter Abschnitt.

Von Auffindung der Werthe unbekannter Größen in einfachen Gleichungen.

A.

Bei einer bestimmten Gleichung.

§. 132.

Lehrsatz:

Besteht eine Gleichung aus bekannten und einer unbekannten Größe, so findet man den Werth der unbekannten Größe nach §. 130 dadurch, daß man solche auf eine Seite alleine, und die bekannten als den ihr dann gleichen Werth durch Rechnungsoperationen auf die andere Seite der Gleichung schaffet, d. i. indem man die gegebene Gleichung in eine Wurzelgleichung verwandelt.

§. 133.

Aufgabe:

Die unbekannte Größe einer einfachen bestimmten Gleichung auf eine Seite der Gleichung alleine zu schaffen, oder ihren Werth zu finden.

Auflösung:

I. Ist solche mit andern Gliedern verbunden, so schaffe man diese Glieder dadurch auf die andere Seite, daß man sie mit entgegengesetztem Zeichen hinübersetzet; z. B. ist

$$x + a - b = c,$$

so ist $x = c - a + b$;

Beweis:

Gleiches zu Gleichem addirt, und Gleiches vom Gleichen abgezogen, giebt wieder Gleiches, folgl. ist

$$x + a - b = c$$

$+a = +a$, abgezogen,

bleibt $x - b = c - a$

$+b = +b$ addirt,

so ist $x = c - a + b$;

Zusatz:

Wenn man alle Glieder auf eine Seite schaffet, so wird dadurch die Gleichung auf Null gebracht; z. B. bei obiger Gleichung ist

$$x+a-b-c=0;$$

II. Kommt die unbekannte Größe z. B. x öfter vor, so schaffe man alle Glieder, worin sie vorkommt auf eine, und die anderen auf die andere Seite, addire dann die auf der einen Seite stehenden x nach 9ten Zus. des §. 74 und dividire dann mit dem dadurch erhaltenden Coeffizienten die beiden Seiten, d. i. die ganze Gleichung, z. B.

1tens, ist $x+a+b=c-x$, so ist

$$x+x=c-a-b$$

$$2x=c-a-b$$

$$x=\frac{c-a-b}{2};$$

2tens, ist $2ax+\frac{b}{c}x=d$, so ist

$$(2a+\frac{b}{c}x=d$$

$$\frac{2ac+b}{c}x=d$$

$$x=d:\frac{2ac+b}{c}=\frac{cd}{2ac+b};$$

3tens, ist $x-\frac{dx}{c}=b$, so ist

$$(1-\frac{d}{c})x=b$$

$$\frac{c-d}{c}x=b$$

$$x=b:\frac{c-d}{c}=\frac{bc}{c-d};$$

denn Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.

III. Aus eben dem Grunde verfahre man ebenso, wenn die unbekannte Größe schon Coeffizienten bei sich hat, oder,

was einerlei ist, wenn sie mit anderen bekannten Größen durch Multiplication verbunden ist, z. B.

1tens, ist $4ax = b+c$, so ist

$$\frac{4ax}{4a} = \frac{b+c}{4a}, \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{b+c}{4a};$$

2tens, ist $\frac{2}{3}x = b-c$, so ist

$$x = (b-c) : \frac{2}{3} = \frac{3(b-c)}{2};$$

und ist sie in mehreren Gliedern mit Factoren vorhanden, so schaffe man diese Glieder auf eine Seite, und zerlege dann solche dergestalt in Factoren, daß der eine die unbekannte Größe und der andere aber die damit verbunden gewesenen bekannten werden, wo man dann Letztere durch Division nach oben wegschaffet; d. i. man behandle alle diese Factoren nach IItens als Coeffizienten, z. B.

ist $a.x + b.x - x = c$, so ist

$$(a+b-1)\,x = c \text{ und}$$

$$x = \frac{c}{a+b-1};$$

IV. Kömmt die unbekannte Größe, nachdem man sie auf eine Seite geschaffet, mit einem Divisor oder Nenner vor, so schaffe man solchen dadurch weg, daß man die ganze Gleichung damit multiplicirt; z. B.

$$\text{ist } \frac{x}{4} = c-d, \text{ so ist}$$

$$x = 4\,(c-d);$$

denn Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.

Zusatz:

Kommen in der Gleichung mehrere Nenner oder Divisoren vor, so werden solche dadurch auf einmal weggeschaffet, daß man jedes Glied, d. i. die ganze Gleichung mit dem Generalnenner (§. 48 und 87) multiplicirt, z. B. ist

$\frac{x}{2} - \frac{c}{3} = \frac{d}{4a} - b$, also mit 12a multiplicirt,

giebt $6ax - 4ac = 3d - 12ab$, und

$$x = \frac{3d + 4ac - 12ab}{6a}.$$

V. Kommt die unbekannte Größe als Nenner oder Divisor vor, so multiplicire man damit aus eben dem Grunde die ganze Gleichung und verfahre dann nach vorigen; z. B.

ist $\frac{a-b}{x} = c+d$, so ist hiernach

$a - b = (c+d)\,x$ und nach III^{tens},

$$\frac{a-b}{c+d} = x$$

VI. Ist die unbekannte Größe, nachdem man sie auf eine Seite alleine geschaffet, negativ, so ändere man die Zeichen aller Glieder der Gleichung, z. B. ist

$-x = b - a$, so setze man

$x = a - b$;

denn nach I^{tens}, lassen sich alle Glieder der einen Seite mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung schaffen, folgl. wenn

$-x = b - a$, so ist

$a - b = x$, oder was einerlei

$x = a - b$.

VII. In Beziehung der Ordnung, schaffe der Anfänger zuerst alle Nenner oder Divisoren (nach IV.) weg, verrichte die blos angezeigten Multiplicationen wirklich, bringe dann alle Glieder mit der unbekannten Größe (nach I.) auf eine, und die anderen auf die andere Seite, addire dann (nach II.) die Glieder mit der unbekannten Größe und schaffe auch den sich dadurch ergebenden Coefficienten hiernach weg, bis Er durch Uebung den jedesmal kürzesten Weg zu nehmen gelernet hat.

Zusatze:

1^{tens}, Bei der Auflösung einer allgemeinen Gleichung pflegt man ihr auch eine möglichst einfache Gestalt dadurch zu

geben, daß man Summen oder Differenzen von ganzen Zahlen und Brüchen oder von verschiedenerlei Brüchen unter einerlei Benennung bringt, und bei Factoren oder Quotienten von Brüchen die Multiplication oder Division verrichtet, hingegen die Multiplication oder Division von Summen oder Differenzen ganzer Zahlen blos andeutet, z. B. bei

$1^{\text{tens}}_{\text{"}}, x = a + \frac{b}{c} - \frac{d}{c}$ setze man $x = \frac{ac+b-d}{c}$;

$2^{\text{tens}}_{\text{"}}, x = \frac{d}{c} + \frac{e}{f}$ " " $x = \frac{df+ce}{cf}$;

$3^{\text{tens}}_{\text{"}}, x = \frac{d}{c} \times \frac{e}{f}$ " " $x = \frac{de}{cf}$;

$4^{\text{tens}}_{\text{"}}, x = \frac{d}{2a+\frac{b}{c}}$ " " $x = \frac{dc}{2ac+b}$;

hingegen bei

$5^{\text{tens}}_{\text{"}}, x = ac+bc$ " " $x = (a+b)c$;

$6^{\text{tens}}_{\text{"}}, x = a:c+b:c$ " " $x = \frac{a+b}{c}$;

$2^{\text{tens}}_{\text{"}}$, Erhält man aus den Bedingungen einer Aufgabe für die unbekannte Größe einen negativen Werth, so findet die Frage in entgegengesetzter Art statt, z. B. wäre bei der 3ten Aufgabe im §. 131 gefragt, wann der Vater viermal älter würde, als der Sohn, so ist nach derselben

$$46+x = 4(13+x), \text{ also}$$
$$46+x = 52+4x,$$
$$46-52 = 4x-x$$
$$-6 = 3x$$
$$-2 = x;$$

d. i. der Vater wird nicht erst 4mal älter als der Sohn, sondern er war es schon vor 2 Jahren; es hätte daher statt »wenn wird er« eigentlich »wenn war er« gefragt werden sollen.

B.

Bei mehreren durch einander bestimmten Gleichungen.

§. 134.

Aufgabe:

Die Wurzeln von zwey unbekannten Größen, z. B. x und y durch zwey hiezu gegebene Gleichungen zu finden.

1te Auflösung:

Man suche nur aus einer Gleichung den Werth von der einen unbekannten Größe, z. B. von x, indem man einstweilen y als bekannt betrachtet, und setze in der anderen Gleichung diesen gefundenen Werth statt x, so erhält man dadurch eine Gleichung mit nur einer unbekannten Größe y, deren Werth nach §. 133 gefunden wird; wodurch sich dann der von x auch leicht ergiebt, wenn man in den von x zuerst gefundenen Werth, statt der unbekannten Größe y ihren jetzt gefundenen Werth setzet; z. B.

ist $x+y=b$; und $x-y=d$; so ist

$x=b-y$; also $b-y-y=d$;

$-2y=d-b$;

$2y=b-d$;

$$y=\frac{b-d}{2}$$

$$x=b-\frac{b-d}{2}=\frac{2b-b+d}{2}=\frac{b+d}{2};$$

Zusaetze:

Diese Methode nennt man die Auflösung durch Substitution, weil man den in der einen Gleichung von x gefundenen Werth in der andern statt x setzet oder subſtituirt; sie ist vorzüglich anwendbar, wenn man den Werth der einen unbekannten Größe gefunden und den der zweyten noch zu suchen hat.

2te Auflosung:

Man suche den Werth von der einen unbekannten Größe,

z. B. von x in jeder Gleichung, indem man y einstweilen als bekannt annimmt, und setze diese von x gefundenen Werthe einander gleich; denn zwey Größen, die einer dritten, wie hier dem x, gleich sind, sind sich selbst gleich. Dadurch erhält man nun eine neue Gleichung mit nur noch der einen unbekannten Größe y, deren Werth nach §. 133 gefunden wird, der Werth von x ergiebt sich dann ebenso, wie bei der 1ten Auflösung. Z. B.

ist $x+y=b$; und $x-y=d$; so ist
$x=b-y$; $x=d+y$; folgl.
$b-y=d+y$; also.
$b-d=y+y=2y$; und
$\frac{b-d}{2}=y$;

Dieses $\frac{b-d}{2}$ in der Gleichung $x=b-y$ oder in $x=d+y$ nach dem Zus. der 1ten Auflösung subsituiret, giebt den Werth von $x=\frac{b+d}{2}$;

Zusatz:

Diese Methode nennt man die Auflösung durch Comparation (Vergleichung), weil man durch Vergleichung der in jeder Gleichung von x zuerst gefundenen Werthe, eine neue bildet, wodurch die eigentliche Auflösung erzwecket wird.

3te Auflösung:

Man schaffe die eine unbekannte Größe, z. B. x dadurch weg, daß man die Coeffizienten dieser Größe x in beyden Gleichungen, durch Multiplication oder Division jeder Gleichung, gleich macht (wenn sie nicht schon gleich sind), und wenn dann x in beyden Gleichungen einerlei Zeichen hat, so subtrahire man die kleinere Gleichung von der größern, und wenn x verschiedenerlei Zeichen hat, addire man beyde Gleichungen. Z. B. ist

1tens, $x+y=b$; und $x-y=d$;

$x-y=d$; subtrahirt,

$- + -$

bleibt $2y=b-d$;

$$y=\frac{b-d}{2};$$

2tens, ist $2x+y=a$; und $2y-3x=b$; alſo

$6x+3y=3a$; $4y-6x=2b$;

$6x+3y = 3y+6x=3a$; addirt

giebt $7y = 2b+3a$, alſo

$$y=\frac{2b+3a}{7};$$

Nun wird entweder nach der 1ten Aufl. dieſer von y gefundene Werth in einer der erſten Gleichungen ſubſtituiret und der Werth von x dadurch gefunden, oder es geſchiehet ſolches auch durch dieſe 3te Methode, neml.

bei 1tens iſt $x+y=b$; und $x-y=d$; daher

$x-y=d$; addirt

giebt $2x = b+d$; und

$$x=\frac{b+d}{2};$$

bei 2tens, $2x+y=a$; und $2y-3x=b$; alſo

$4x+2y=2a$;

$-3x+2y=b$; ſubtrahirt

$+ - -$

giebt $7x=2a-b$, alſo

$$x=\frac{2a-b}{7};$$

Zuſätze:

1tens, Dieſe Methode nennt man die Auflöſung durch Elimination, weil dadurch die eine unbekannte Größe gleich weggeſchaffet oder eliminirt wird.

2tens, Sie ist bei 2 Gleichungen, welche die nemlichen unbekannten Größen enthalten deswegen die beste Methode, weil sie zur schnellsten Auffindung der einen unbekannten Größe führet, d. i. am schnellsten einen Theil des gewünschten Resultats giebt; wo hingegen in allen andern Fällen die 2te Methode am anwendbarsten und in Beziehung des ganzen Resultats meistens so schnell wie diese 3te Methode ist.

§. 135.

Aufgabe:

Den Werth von drei unbekannten Größen z. B. x, y, z, aus drei hiezu gegebenen Gleichungen zu bestimmen.

Auflösung:

1tens, Man bilde sich aus denselben nach einer der Auflösungs-Methoden im §. 134 zwey Gleichungen, welche die eine unbekannte Größe z. B. x nicht mehr enthalten; z. B. ist

1tens, $x+y+z=c$; 2tens, $2x-y+3z=d$; 3tens, $y-z=a$;

so ist $x=c-y-z$; $x=\frac{d+y-3z}{2}$; also

4tens, $c-y-z=\frac{d+y-3z}{2}$;

daher die 3te und 4te Gleichung die verlangten. Enthielte aber auch die 3te Gleichung die drei unbekannten Größen und wäre solche $4x+y-2z=e$; so müßte auch hieraus der Werth von x, welcher also $=\frac{e-y+2z}{4}$ ist, gesucht werden, woraus sich dann durch Gleichsetzung des Werthes von x aus der 2ten und dieser 3ten oder aus der 1ten und dieser 3ten eine neue 5te, nemlich $\frac{d+y-3z}{2}=\frac{e-y+2z}{4}$; oder $c-y-z=\frac{c-y+2z}{4}$ ergiebt, welche, so wie die 4te, die Größe x nicht mehr enthält.

5tens, Aus diesen beyden neuen, die Größe x nicht mehr ent-

haltenden, Gleichungen suche man gleichfalls nach §. 134 den Werth der beyden Größen y und z; und

3tens, bestimme durch Substitution dieser gefundenen Werthe auch den Werth von x.

Bei obigem ersten Beispiele war

3tens, $y-z=a$; und 4tens, $c-y-z=\frac{d+y-3z}{2}$; also

$y=a+z$;

$2c-2y-2z=d+y-3z$;

$2c+z-d=3y$;

$\frac{2c+z-d}{3}=y$;

daher 5tens, $a+z=\frac{2c+z-d}{3}$;

$3a+3z=2c+z-d$;

$2z=2c-d-3a$;

$z=\frac{2c-d-3a}{2}$;

Diesen gefundenen Werth von z, neml. $\frac{2c-d-3a}{2}$ statt z in obiger Gleichung $y=a+z$, substituiret, giebt $y=a+\frac{2c-d-3a}{2}=\frac{2c-d-a}{2}$, also den Werth von y; und jetzt diese von y und z gefundenen Werthe in der Gleichung $x=c-y-z$ substituiret, giebt

$x=c-\frac{2c-d-a}{2}-\frac{2c-d-3a}{2}$, also

$x=\frac{2c-2c+d+a-2c+d+3a}{2}=\frac{2d+4a-2c}{2}$, d. i.

$x=d+2a-c$;

Zusatz:

Wenn man den Werth der einen unbekannten Größe schon gefunden hat, so wählt man sich zur Bestimmung der übrigen unbekannten Größen, die in der Rechnung vorkommenden hiezu bequemsten Gleichungen; man kann daher bei

allgemeinen Gleichungen, je nachdem man den Werth dieser übrigen unbekannten Größen aus ein oder der andern Gleichung ableitet, die Werthe derselben verschieden ausgedrückt erhalten.

§. 136.

Zusatz:

Aus vier Gleichungen werden ebenso die Werthe von vier unbekannten Größen und überhaupt aus n Gleichungen die Werthe von n unbekannten Größen gefunden, wenn man nach §. 135, n—1 unbekannte Größen wegschaffet, d. i. daraus eine Gleichung mit nur einer beliebigen dieser unbekannten Größen bildet, und den Werth derselben und der übrigen n—1 unbekannten Größen berechnet.

C.

Bei unbestimmten Gleichungen.

§. 137.

Aufgabe:

Den Werth unbekannter Größen bei unbestimmten Aufgaben zu finden, wenn eine Gleichung weniger gegeben ist, als unbekannte Größen vorhanden sind.

Vormerkung.

Daß zweyen unbekannten Größen in einer Gleichung eine unendliche Menge von Werthen zukömmt, wenn außer den Werthen in ganzen Zahlen auch andere in gebrochenen nach den Bedingungen der Aufgabe, statt finden können, wird Jeder gleich einsehen, indem man für die eine jeden beliebigen Werth setzen, — und dadurch den Werth der andern bestimmen kann; alleine man stellt dergleichen Aufgaben gewöhnlich so, daß der Werth der unbekannten Größen in ganzen positiven Zahlen besteht, und auf diese Voraussetzung gründet sich nachstehende

Auflösung:

1^tens^, Man verfahre wie bei bestimmten Gleichungen nach B, dieses Abschnittes, bis man nur noch eine Gleichung

mit zwey unbekannten Größen hat, und schaffe in dieser die eine unbekannte Größe z. B. x, welche den kleinsten Coeffizienten hatte, ohne selbigem auf eine, und die andere unbekannte Größe z. B. y, nebst denen bekannten auf die andere Seite derselben; und

2tens, bestimme aus dem Verhältniß der erhaltenen Gleichung die in ganzen positiven Zahlen statt finden könnenden Werthe der unbekannten Größen x und y, und aus solchen nach §. 135 die der übrigen unbekannten Größen, wenn dergleichen nach 1tens vorhanden sind; z. B.

I. Wenn nach dem Verfahren nach 1tens, die andere Seite mit der Größe y keinen Divisor behält, wie z. B. bei

$$x = 15 - 3y,$$

so kann, da x und y ganze Zahlen sind, also jede wenigstens = 1 ist, y höchsteus = 4 seyn, weil 3y kleiner als 15 seyn muß, und demnach y blos die Werthe von 1 bis 4 haben; ist nun

$$y = 1, \text{ so ist } x = 12,$$
$$y = 2, \quu\quad x = 9,$$
$$y = 3, \quu\quad x = 6,$$
$$y = 4, \quu\quad x = 3,$$

welches die 4erlei seyn könnenden Werthe von x und y sind.

II. Wenn diese Seite dann einen Divisor erhält, wie z. B. bei

$$A;\ x = \frac{20y - 3}{13};$$

so muß, da x eine ganze Zahl ist, auch $\frac{20y-3}{13}$ eine ganze Zahl seyn, und wenn man die Division wirklich verrichtet, der bleibende Bruch also auch einer ganzen Zahl gleich seyn, d. i. da

$$\frac{20y-3}{13} = y + \frac{7y-3}{13};$$

so ist $\frac{7y-3}{13}$ gleich einer ganzen Zahl und kann

$\frac{7y-3}{13} = a$ seyn, wo dann

B; $y = \frac{13a+3}{7} = a + \frac{6a+3}{7}$ ist; und da auch y eine ganze Zahl ist, so ist nach dem unter A, angeführtem Grunde

$\frac{6a+3}{7}$ = einer ganzen Zahl und kann

$\frac{6a+3}{7} = b$ seyn, wo also

C; $a = \frac{7b-3}{6} = b + \frac{b-3}{6}$ ist;

und da nach obiger Annahme a eine ganze Zahl ist, so ist auch $\frac{b-3}{6}$ eine ganze Zahl, und kann also

$\frac{b-3}{6} = c$ seyn, denn nach

D; $b = 6c+3$; und nach

C; $a = b + \frac{b-3}{6} = 6c+3+c = 7c+3$; dann nach

B; $y = a + \frac{6a+3}{7} = 7c+3+6c+3 = 13c+6$; und nach

A; $x = y + \frac{7y-3}{13} = 13c+6+7c+3 = 20c+9$;

Aus diesen beyden letzten Gleichungen, nemlich $x = 20c+9$, und $y = 13c+6$ folgt, daß $c = 0$ und jeder ganzen Zahl gleich seyn kann.

Ist nun $c = 0$, so ist $x = 9$ und $y = 6$;
= = $c = 1$, = = $x = 29$ = $y = 19$;
= = $c = 2$, = = $x = 49$ = $y = 32$;
u. s. w.

woraus man ersieht, daß der Werth von x jedem Gliede der arithmetischen Progression 9, 29 u. s. w., und dann der von y jedem Gliede der arithmetischen Progression (§. 157) 6, 19 u. s. w. gleich ist, oder daß x jeder Zahl von der Form $20n+9$ und dann y jeder Zahl von der Form $13n+6$ gleich ist.

Zusatze:

1tens, Durch dieses Verfahren erhält man, wie leicht zu ersehen, alle seyn könnenden Werthe der unbekannten Größen in ganzen Zahlen; und ergiebt sich, daß die unbekannten Größen nur einen Werth haben können; so ist die Aufgab: eine bestimmte, und schien nur eine unbestimmte.

2tens, Ist bei einem nach II. bleibenden Bruche, der Zähler eine einfache Größe, so kann man den Buchstaben des Zählers sgleich einer Größe, welche den Nenner als Coeffiziemen hat, gleich setzen, d. i. ist z. B. der Bruch $= \frac{7y}{13}$, so setze man

$$y = 13a;$$

denn nach II. ist

$$\frac{7y}{13} = b$$

$$7y = 13b$$

$$y = \frac{13b}{7} = b + \frac{6b}{7}$$

$$\frac{6b}{7} = c \text{ und daher}$$

$$b = \frac{7c}{6} = c + \frac{c}{6}$$

$$\frac{c}{6} = a$$

$$c = 6a$$

$$\text{also } b = 7a$$

$$\text{und } y = 13a;$$

3tens, Man hat bei einem bleibenden Bruche auch darauf zu sehen, ob solcher einer ganzen positiven Zahl gleich seyn kann oder einer negativen gleich seyn muß; so ist z. B. der Bruch

$$\frac{4-5y}{7}$$

negativ, denn da y eine ganze Zahl, wenigstens $= 1$

ist und 4—5 negativ ist, so muß auch $\frac{4-5y}{7}$ negativ seyn, und man hat daher

$$\frac{4-5y}{7} = -a$$

zu nehmen.

4tens, Die Verfahrungsart, aus 2 Gleichungen drey oder mehrere unbekannte Größen zu finden, nennt man, wenn sie von der Form $x+y+z=s$, und $ax+by+cz=P$, sind (wie die aus der 9ten Aufgabe des §. 131 gebildeten) Regula cocci oder Virginum.

Vierter Abschnitt.

Von Auffindung der Werthe unbekannter Größen in höheren reinen Gleichungen.

§. 138.

Aufgabe:

Die Wurzeln höherer reiner Gleichungen zu finden.

Auflösung:

1tens, Man suche nach §. 133, wenn nur eine unbekannte Größe vorhanden, oder nach §. 134 bis 136, wenn deren mehrere vorhanden sind, den Werth jeder unbekannten Größe, Wurzelgröße oder Potenz;

2tens, erhebe dann, wenn man den Werth der Wurzelgröße gefunden hat, deren ganze Gleichung zur Dignität von dem Grade der Wurzelgröße, und hat man den Werth der Potenz einer unbekannten Größe gefunden, so ziehe man aus deren Gleichung die Wurzel mit dem Exponenten dieser Potenz, wodurch man nach Zus. des §. 97 die einfache unbekannte Größe auf der einen und deren Werth also auf der anderen Seite der Gleichung (nach 2ten Zus. des §. 96) erhält; z. B. ist nach 1tens,

$\sqrt{x} = \pm 12$, so erhebe man beyde Seiten zum Quadrate, d. i. $x = (\pm 12)^2 = 144$; und hat man nach 1tens, $y^3 = 27$ erhalten, so ziehe man aus beyden Seiten die Cubikwurzel, wodurch man $y = 3$, bekommt.

Zusaetze:

1tens, Eine reine quadratische Gleichung hat zwey einander gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln, denn es giebt sowohl $+x$ als $-x$ zum Quadrate erhoben, $+x^2$;

2tens, Ueberhaupt hat eine reine höhere Gleichung vom nten Grade, n Wurzeln, wovon, wenn man die eine nach obigem Lehrsatz gefunden hat, die übrigen durch Division mit dieser gefundenen Wurzelgleichung nach und nach erhalten werden; zur Auflösung einer Aufgabe hat man aber nach deren Bedingungen meistens nur die positive und einfachste Wurzel zu suchen.

3tens, Kommt die unbekannte Größe als Exponent vor, so suche man solche nach der Lehre der Logarithmen; (siehe §. 182).

Fünfter Abschnitt.

Von Auffindung des Werthes unbekannter Größen in gemischten quadratischen Gleichungen.

§. 139.

Aufgabe:

Jede gemischte quadratische Gleichung aufzulösen, d. i. ihre Wurzeln zu finden.

Auflösung:

Da jede zweytheilige Größe, z. B. $x+d$, zum Quadrate erhoben, $= x^2 + 2dx + d^2$ ist, so bringe man die Gleichung auf die Form $x^2 + ax = b$, wo dann offenbar zum vollstän-

digen Quadrate eines Binomiums auf der ersten Seite $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ fehlt, welches man daher auf beyden Seiten der Gleichung addirt, wodurch man $x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\left(b+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}$ erhält, und also

$$x=\frac{\pm\sqrt{(4b+a^2)}-a}{2} \text{ ist.}$$

Zusaetze:

1tens, Jede Gleichung von der Form $x^{2m}+ax^m=b$ kann als eine gemischte quadratische behandelt werden, und man erhält dadurch die Wurzelgleichung $x^m=\frac{\pm\sqrt{(4b+a^2)}-a}{2}$ also eine reine höhere Gleichung.

2tens, Ist $4b+a^2$ eine negative Größe, so ist nach 2ten Zus. des §. 101; $\sqrt{(4b+a^2)}$ eine eingebildete Größe und erhält man aus den Bedingungen einer Aufgabe für die unbekannte Größe einen solchen Werth, so zeigt dieß an, daß diese Bedingungen nicht zu erfüllen sind.

3tens, Hat man für zwey unbekannte Größen zwey Gleichungen, und davon eine von der Form $x^2+y^2=b$, so suche man entweder aus jeder dieser Gleichungen x, setze die für x gefundenen Werthe einander gleich, und bestimme dann nach übiger Aufgabe hieraus den von y; oder man bestimme, wenn es seyn kann, aus der andern Gleichung den Werth von $\pm 2xy$, so erhält man, wenn man dann beyde Gleichungen addirt und aus der Summe die Quadratwurzel ziehet, auf der einen Seite $\sqrt{(x^2\pm 2xy+y^2)}$, welche $x\pm y$ ist, worauf man dann nach den bisherigen Anleitungen weiters verfährt.

4tens, Hat man eine Gleichung von der Form $x^2-y^2=b$, so gewährt es öfters Vortheil statt x^2-y^2, nach 3ten Zus. des §. 111, $(x+y)\times(x-y)$ zu setzen.

5tens, Gemischte höhere Gleichungen, die sich erst, durch, zur Auflösung einer Gleichung nöthigen Rechnungsopera-

tionen, ergeben würden, können meistens vermieden werden, wenn man für ein, darin vorkommendes, unbekanntes Binomium, eine andere unbekannte Größe setzet, den Werth dieser suchet, und daraus den Werth der ersteren bestimmt; daher man auch, um dieses zu bewirken, statt der, nach einer Aufgabe zu suchenden Größen, irgend eine Combination derselben suchet, aus welcher man dann, mit Hülfe der schon von ihnen gegebenen Combinationen, die Größen selbst berechnen kann.

§. 140.

Berechnung der unbekannten Größen aus den, im §. 131 gebildeten Gleichungen.

1.

$$10x = x+10;$$
$$10x-x = 10;$$
$$9x = 10;$$
$$x = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9};$$

also die Zahl $= 1\frac{1}{9}$.

2.

$$x+(x+2)+(x+x+2+4) = 96;$$
$$4x+8 = 96;$$
$$4x = 96-8=88;$$
$$x = \frac{88}{4} = 22;$$

demnach war A 22 Jahre, B, 24, und C, 50 Jahre alt.

3.

$$46+x = 2(13+x);$$
$$46+x = 26+2x;$$
$$46-26 = 2x-x;$$
$$20 = x;$$

folglich tritt der verlangte Fall in 20 Jahren ein.

4.

$$x = 15 + \frac{x}{12};$$

$$12x = 12 \cdot 15 + x;$$

$$12x - x = 180;$$

$$11x = 180;$$

$$x = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11};$$

also in $16\frac{4}{11}$ Minuten.

5.

$y = x - 1$; und $x = 2(y - 1)$;

$y + 1 = x$; $x = 2y - 2$;

$y + 1 = 2y - 2$;

$1 + 2 = 2y - y$;

$3 = y$;

$x = y + 1 = 3 + 1 = 4$;

daher es 3 Töchter und 4 Söhne, also 7 Kinder waren.

6.

$x + 2 = y - 2$; und $y + 2 = 2(x - 2)$;

$x + 4 = y$; $y = 2x - 6$;

$x + 4 = 2x - 6$;

$10 = x$;

$y = x + 4 = 10 + 4 = 14$;

es hatte also A, 10, und B, 14 Nüsse.

7.

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{4}; \text{ und } \frac{x}{y-1} = \frac{1}{3};$$

$$x - 1 = \frac{y}{4}; \qquad x = \frac{y-1}{3};$$

$$x = \frac{y}{4} + 1; \text{ also}$$

$\frac{y}{4} + 1 = \frac{y-1}{3}$; mit 12 multiplicirt, giebt

$3y + 12 = 4y - 4$;

$16 = y$;

$x = \frac{y}{4} + 1 = \frac{16}{4} + 1 = 5$;

also der Bruch $\frac{x}{y} = \frac{5}{16}$.

8.

$10x + y = 4(x + y)$; und $10x + y + 18 = 10y + x$;

$10x + y = 4x + 4y$; $9x + 18 = 9y$;

$6x = 3y$; $x + 2 = y$;

$2x = y$;

$2x = x + 2$;

$x = 2$;

$y = x + 2 = 2 + 2 = 4$;

daher die zweyziffrige Zahl 24 ist.

9.

1^{tens}, $x + y + z = 100$; und 2^{tens}, $2\frac{7}{10}x + 2\frac{2}{5}y + \frac{2}{5}z = 100$

$27x + 27y + 27z = 2700$; $27x + 24y + 4z = 1000$;

$27x + 24y + 4z = 1000$ abgezogen,

$3y + 23z = 1700$;

3^{tens}, $y = \frac{1700 - 23z}{3}$; also nach §. 137.

$y = 566 - 7z + \frac{2 - 2z}{3}$;

$\frac{2 - 2z}{3} = -a$;

$2 - 2z = -3a$;

4^{tens}, $z = \frac{3a + 2}{2} = a + 1 + \frac{a}{2}$; und

$\frac{a}{2} = b$,

$a = 2b$, demnach ist

nach 4^{tens}, $z = 3b+1$;

$= 3^{tens}$, $y = 559-23b$; also b höchstens $= 24$

$= 1^{tens}$, $x = 100-y-z$

$= 20b-460$; also b wenigstens $= 24$.

Da nun b höchstens und wenigstens $= 24$, also wirklich $b=24$, so ist $x=20.24-460=20$

$y=559-23.24=7$

$z=3.24+1=73$;

demnach es 20 Kronthlr., 7 Conventthlr., und 73, 24 kr. Stücke waren.

10.

Was durch 4 dividirt, 3 zum Rest läßt, läßt durch 2 dividirt, 1 zum Rest, und was durch 6 dividirt, 5 zum Rest läßt, läßt durch 3 dividirt, 2 zum Rest, also bedarf man nur der Gleichungen

I. II. III.

$$4w+3 = 5x+4 = 6y+5 = 7z;$$

$$w = \frac{5x+1}{4}; \quad x = \frac{6y+1}{5}; \quad y = \frac{7z-5}{6} = z + \frac{z-5}{6};$$

$$\frac{z-5}{6} = a;$$

$$z = 6a+5;$$

$$y = 7a+5;$$

$$x = \frac{42a+31}{5} = 8a+6+\frac{2a+1}{5};$$

$$\frac{2a+1}{5} = b;$$

$$a = \frac{5b-1}{2} = 2b+\frac{b-1}{2};$$

$$\frac{b-1}{2} = c;$$

$$b = 2c+1;$$

$$a = 5c+2;$$

$$x = 42c+23;$$

$$w = \frac{210c+116}{4} = 52c+29+\frac{c}{2};$$

$$c = 2d;$$

$w = 105d+29$, daher $d=0$ und jeder ganzen Zahl,

also die verlangte Zahl $4w+3=420d+119$;
ist demnach $d=0$, so ist sie $=119$
$d=1$, = = = $=539$
$d=3$, = = = $=959$
u. s. w.
es haben also alle Glieder der arithmetischen Progressionen 119, 539 ꝛc. die verlangte Eigenschaft.

11.

$$x.x+284=(x+1).(x+1)-25;$$
$$x^2+284=x^2+2x+1-25;$$
$$284=2x-24;$$
$$308=2x;$$
$$154=x;\ \text{folgl.}$$
$$x^2=154^2=23716$$
$$x^2+284=23716+284=24000.$$

demnach Harpax 24000 Ducaten hatte.

12.

$$\frac{2700}{100+x}\cdot x=\frac{3300}{102+x}\cdot(x-1)-10;$$
$$\frac{2700+}{100+x}=\frac{3300x-3300-1020-10x}{102+x};$$

also mit $(100+x).(102+x)$ multiplicirt, giebt

$$275400x+2700x^2=330000x-330000-102000-1000x$$
$$+3300x^2-3300x-1020x-10x^2;$$
$$432000=590x^2+49280x;$$
$$x^2+\frac{4928}{59}x+\left(\frac{2464}{59}\right)^2=\frac{43200}{59}+\frac{6071296}{59.59};$$
$$=\frac{8620096}{59.59};$$

$$x + \frac{2464}{59} = \sqrt{\frac{8620096}{59.59}} = \pm\frac{2936}{59};$$

$$x = \pm\frac{2936}{59} - \frac{2464}{59} = \frac{472}{59} = 8;$$

daher er das erstemal 8 brutto Cutr. oder $\frac{100}{108} \cdot 8 = \frac{800}{108}$ $= 7\frac{1}{2}\frac{1}{7}$ netto Cntr.; dann das zweytemal 7 brutto Cntr. oder $\frac{100}{110} \cdot 7 = \frac{700}{110} = 6\frac{4}{11}$ netto Cntr. empfieng, und das erstemal 200 fl., und das zweytemal 210 fl. bezahlte.

V.

Von den Proportionen.

Erster Abschnitt.

Von den Proportionen im Allgemeinen.

Vormerkung.

Die Lehre der Proportionen oder der gleichen Verhältnisse, und die Auffindung unbekannter, durch Proportionen bestimmter, Größen, geht so einfach aus der Lehre der Algebra hervor, daß sie diejenigen, welche aus letzterer bereits gelernt haben, richtig zu schließen, wohl entbehren können; allein da Einige hierin noch Hülfe bedürfen möchten, und Andere den sehr üblichen besonderen und ausführlichen Vortrag derselben ungerne vermissen würden, so folgt sie auch hier.

§. 141.

Erklärungen:

1tens, Die Gleichheit zweyer Verhältnisse (3ter Zus. des §. 130) heißt eine Proportion, und zwar die Gleichheit

zweyer arithmetischen Verhältnisse (§. 15, 8tens) eine arithmetische, und die, zweyer geometrischen Verhältnisse (§. 5, 1tens) eine geometrische Proportion, und man versteht unter Proportion ohne weiteren Beisatz immer eine geometrische.

2tens, Eine Proportion besteht also aus vier Gliedern, und man nennt das erste und dritte, Vorderglieder, das zweyte und vierte ihre Hinterglieder, das erste und vierte die äußeren, das zweyte und dritte die mittleren, dann die beyden Vorderglieder, so wie auch die beyden Hinterglieder, gleichnamige oder homologe Glieder.

3tens, Sind die Hinterglieder größer als die Vorderglieder, so heißt die Proportion zunehmend oder steigend (divergirend), außerdem abnehmend oder fallend, (convergirend).

4tens, Sind die mittleren Glieder gleich, so heißt die Proportion stetig, ausserdem discret.

5tens, Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist (—), und das des geometrischen (:), welches man zwischen die Glieder, nemlich zwischen die gegen einander betrachtenden Zahlen setzet.

6tens, Den Unterschied d zweyer Glieder des arithmetischen Verhältnisses nennt man, so wie den Quotienten q zweyer Glieder des geometrischen Verhältnisses den Exponenten des Verhältnisses.

Zusaetze:

1tens, a—(a+d)=b—(b+d) ist daher eine Formel einer arithmetischen, und a:aq=b:bq eine Formel einer geometrischen Proportion, wobei, wenn sie eine abnehmende seyn soll, bei ersterer d negativ, und bei letzterer q ein ächter Bruch ist.

Erstere wird gelesen »a verhält sich zu a+d wie b zu b+d« und Letztere »a verhält sich zu aq wie b zu bq.«

2tens, Jede derselben kann als Gleichung und dabei das Zei-

chen (—) als Subtractionszeichen, und das Zeichen (:) als Divisionszeichen genommen werden.

3tens, Bei einer arithmetischen Proportion erhält man ein Hinterglied, wenn man zu dem Vorderglied den Exponenten addirt, und bei einer geometrischen Proportion, wenn man das Vorderglied mit dem Exponenten multiplicirt; und den Exponenten erhält man bei Ersterer, wenn man das Vorderglied von seinem Hinterglied abzieht, und bei Letzterer, wenn man das Hinterglied durch sein Vorderglied dividirt.

4tens, Bei einer stetigen Proportion pflegt man das eine mittlere Glied nebst dem Gleichheitszeichen weg zu lassen und also statt $a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$ nur $a-(a+d)-(a+2d)$, und statt $a:aq=aq:aq^2$ nur $a:aq:aq^2$ zu schreiben.

Zweyter Abschnitt.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 142.

Lehrsaetze:

Aus 2ten Zusatz des §. 141 geht hervor, daß

1tens, die Summe der beyden äußeren Glieder einer arithmetischen Proportion gleich der Summe ihrer mittleren Glieder ist, denn ist $a-b=c-d$, so ist

$$a+d=b+c;$$

daher sich, wenn die Summe zweyer Zahlen der Summe zweyer andern gleich ist, aus solchen dadurch eine arithm. Proportion bilden läßt, wenn man die beyden Zahlen der einen Summe zu äußern und die der beyden andern zu mittleren Gliedern nimmt.

2tens, Die Summe der beyden äußeren Glieder einer stetigen arithm. Proportion (Zus. 4 des §. 141) ist dem doppelten mittleren Gliede derselben gleich, denn ist

a—b=b—d, so ist

a+d=2b;

wenn daher die Summe zweyer Zahlen dem Duplo einer andern gleich ist, so läßt sich daraus eine stetige arithm. Proportion bilden, wenn man die beyden Zahlen der Summe zu äußeren und die andere zum mittleren Gliede nimmt;

3tens, Bei einer arithm. Proportion kann man die einzelnen Verhältnisse oder die ganze Proportion umgekehrt anschreiben, ohne daß sie dadurch verändert wird; denn ist

a — b = c — d; so ist

b — a = d — c; und

d — c = b — a.

4tens, Die Vorder- und Hinterglieder einer arithm. Proportion stehen ebenfalls in arithm. Proportion, d. i. man kann die mittleren Glieder sowohl, als die äußeren, unter sich verwechseln; denn ist

a — b = c — d; so ist auch

a — c = b — d; und

d — b = c — a;

5tens, Eine arithm. Proportion wird nicht verändert, wenn man einem Vorderglied und seinem Hinterglied, oder wenn man beyden homologen Gliedern einerlei Größe addirt oder subtrahirt, oder wenn man dem Vorderglied einer Seite addirt oder subtrahirt, was man dem Hinterglied der andern Seite subtrahirt oder addirt.

6tens, Wenn man alle Glieder zweyer oder mehrerer arithm. Proportionen der Ordnung nach addirt oder subtrahirt, so entsteht daraus wieder eine arithm. Proportion.

§. 143.

Zusaetze:

1tens, Zu drey gegebenen Zahlen erhält man die vierte arithmetische Proportionalzahl, wenn sie das erste oder vierte Glied werden soll, indem man die beyden mittlern Glie-

der addirt, und von der Summe das vierte oder erste Glied abzieht; denn ist

$x - a = b - c$, so ist

$x = (a+b) - c$; und ist

$a - b = c - x$, so ist

$x = (b+c) - a$;

und wenn sie das zweyte oder dritte Glied werden soll, indem man die beyden äußeren Glieder addirt und von der Summe das dritte oder zweyte Glied abzieht; denn ist $a - x = b - c$, so ist

$x = (a+c) - b$; und ist

$a - b = x - c$, so ist

$x = (a+c) - b$;

2tens, Zu zwey gegebenen Zahlen, erhält man die dritte arithm. Proportionalzahl, wenn man von dem doppelten mittleren Gliede, das erste Glied abzieht; denn ist

$a - b - x$, so ist nach §. 142, 2tens,

$a + x = 2b$, also

$x = 2b - a$;

3tens, Zu zwey gegebenen Zahlen, erhält man die mittlere arithm. Proportionalzahl, wenn man die Summe dieser zwey Zahlen durch 2 dividirt; denn ist

$a - x - b$, so ist nach §. 142, 2tens,

$a + b = 2x$, also

$$x = \frac{a+b}{2};$$

4tens, Wenn man bei der Summe mehrerer ungleicher Zahlen Ursache hat, anzunehmen, daß diese Summe durch eben so viele gleiche Zahlen entstanden seyn, so erhält man diese gleiche Zahl, wenn man die Summe (wie bei vorigen Zusatz bei der Summe zweyer Zahlen geschehen) durch die Anzahl ihrer Summanden dividirt; denn ist z. B.

$a+b+c+d = x+x+x+x$, so ist

$$x = \frac{a+b+c+d}{4};$$

und man nennt diese Zahl, welche für einen jeden der Summanden einer Summe gesetzet, die nemliche Summe giebt, das arithm. Mittel oder den Durchschnitt. Bei Beobachtungen, Versuchen, Finanzrechnungen und vielen andern Fällen pflegt man diesen Durchschnitt oder die Mittelzahl der Ergebnisse anzunehmen.

Dritter Abschnitt.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 144.

Lehrsatze:

Aus 2ten Zus. des §. 141 geht hervor:

1tens, Das Produkt der beyden äußern Glieder einer geom. Proportion ist dem Produkte ihrer mittlern Glieder gleich; denn ist

$a : b = c : d$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$ad = bc;$$

daher sich, wenn das Produkt zweyer Zahlen dem Produkte zweyer andern gleich ist, eine geomet. Proportion daraus bilden läßt, indem man die Factoren des einen Produktes zu den äußern, und die des andern Produktes zu den mittleren Gliedern nimmt; z. B. wenn $ad = bc$, so ist $a : b = c : d$,

2tens, Das Produkt der beyden äußern Glieder einer stetigen geom. Proportion ist dem Quadrate ihres mittleren Gliedes gleich; denn ist

$a : b = b : c$, so ist

$ac = b^2$;

daher, wenn das Produkt zweyer Zahlen dem Quadrate

einer dritten gleich ist, läßt sich daraus eine geom. stetige Proportion bilden, wenn man die zwey Zahlen zu denen äußeren Gliedern und die dritte zum mittleren Gliede nimmt.

3tens, Bei einer geom. Proportion kann man, derselben unbeschadet, die einzelnen Verhältnisse oder die ganze Proportion umkehren; denn ist

$a:b = c:d$, so ist nach 1tens,

$bc = ad$, also

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, d. i.

$b:a = d:c$, oder

$d:c = b:a$;

4tens, Die Vorder- und Hinterglieder einer geom. Proportion stehen ebenfalls in geom. Proportion, d. i. man kann die mittleren Glieder sowohl, als die äußeren Glieder, unter sich verwechseln; denn ist

$a:b = c:d$, so ist

$ad = bc$ also

$a:c = b:d$; und $d:b = c:a$;

5tens, Eine geometrische Proportion wird nicht verändert, wenn man ein Vorder- und sein Hinterglied, oder wenn man beyde homologe Glieder durch eineriei Zahl multiplicirt oder dividirt; eben so, wenn man das Vorderglied einer Seite durch die Zahl multiplicirt oder dividirt, durch die man das Hinterglied der andern Seite dividirt oder multiplicirt.

6tens, Wenn man alle Glieder zweyer oder mehrerer geom. Proportionen der Ordnung nach mit einander multiplicirt oder dividirt, so entsteht daraus wieder eine geom. Proportion.

7tens, Wenn man alle Glieder einer geom. Proportion zu gleichen Potenzen erhebt, oder aus ihnen gleiche Wurzeln zieht, so erhält man wieder eine geom. Proportion.

8tens, In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der

Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied; denn ist

$a:b=c:d$; also

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; so ist nach 4ten Zus. des §. 83.

$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, daher

$(a\pm c):(b\pm d)=a:b=c:d$;

eben so verhält sich auch die Summe oder Differenz des ersten Verhältnisses zur Summe oder Differenz des zweyten Verhältnisses, wie die homologen Glieder; und die Summe des ersten Verhältnisses zur Summe des zweyten Verhältnisses, wie die Differenz des ersten zur Differenz des zweyten Verhältnisses; d. i. wenn

$a:b=c:d$, so ist nach 4tens,

$a:c=b:d$, also nach oben

$(a\pm b):(c\pm d)=a:c=b:d$, und

$(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$, dann

$(a+c):(b+d)=(a-c):(b-d)$,

9tens, Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe oder Differenz aller Vorderglieder zur Summe oder Differenz aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied; denn wenn

$a:b=c:d=e:f=g:h$, d. i.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, so ist nach 4ten Zus. des §. 83.

$\frac{a\pm c\pm e\pm g}{b\pm d\pm f\pm h}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, also

$(a\pm c\pm e\pm g):(b\pm d\pm f\pm h)=a:b=c:d=e:f=g:h$

und es sind bei dergleichen stetigen Proportionen alle Glieder, bis auf das letzte, Vorderglieder und alle Glieder, bis auf das erste, Hinterglieder, also z. B. bei

$a:b=b:c=c:d=d:e$ ist

$(a\pm b\pm c\pm d):(b\pm c\pm d\pm e)=a:b=b:c=c:d=d:e$;

§. 145.

Zusaetze:

1tens, Zu drey gegebenen Zahlen erhält man die vierte geom. Proportionalzahl, wenn sie das erste oder vierte Glied werden soll, indem man die beyden mittleren Glieder multiplicirt und das Produkt durch das vierte oder erste Glied dividirt; denn ist

$x : a = b : c$, so ist

$$x = \frac{ab}{c}; \text{ und ist}$$

$c : b = a : x$, so ist

$$\frac{ab}{c} = x$$

und wenn sie das zweyte oder dritte Glied werden soll, indem man das Prvdukt der äußeren Glieder durch das dritte oder zweyte Glied dividirt; denn ist

$a : x = b : c$, so ist

$$x = \frac{ac}{b}, \text{ und ist}$$

$c : b = x : a$, so ist

$$x = \frac{ac}{b}.$$

2tens, Zu zwey gegebenen Zahlen erhält man die dritte geom. Proportionalzahl, wenn man das Quadrat des mittleren Gliedes durch das erste Ziffer dividirt; denn ist

$a : b : x$, so ist nach 2ten Lehrs. des §. 144

$a x = b^2$, also

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

3tens, Zu zwey gegebenen Zahlen erhält man die mittlere geom. Proportionalzahl, wenn man aus dem Produkte der 2 Zahlen die Quadratwurzel ziehet; denn wenn

$a : x : b$, so ist

$ab = x^2$, und

$x = \sqrt{(ab)}$.

4tens, Brüche von gleichen Nennern, verhalten sich wie ihre Zähler, und Brüche von gleichen Zählern verhalten sich umgekehrt, wie ihre Nenner; denn z. B. $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a:c$;

und $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c:b$; (nach 2ten Zus. des §. 141.)

5tens, Aus dem 5ten Lehrs. des §. 144 geht hervor, wie man die Glieder einer Proportion gegen einander verkleinern und deren Nenner versetzen kann, indem man hiernach jedes Vorderglied und sein Hinterglied, oder beyde Vorderglieder, oder auch beyde Hinterglieder durch einerlei Zahl dividiren, und jeden Nenner eines Vordergliedes als Factor in dessen Hinterglied, oder als Factor in das andere Vorderglied, so wie jeden Nenner eines Hintergliedes, als Factor in dessen Vorderglied, oder als Factor in das andere Hinterglied setzen kann; auch läßt sich jeder Nenner eines Vordergliedes als Nenner in das Hinterglied der andern Seite der Proportion setzen, und so umgekehrt.

6tens, Wenn die Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen so beschaffen sind, daß das Hinterglied der einen Seite einer Proportion immer das Vorderglied der nemlichen Seite der nächsten Proportion ist, wie z. B. bei

$$a : b = c : d$$
$$b : e = f : g$$
$$e : h = i : k$$

und man multiplicirt solche nach 6ten Lehrsatz des §. 144 so ergiebt sich, daß sich das Vorderglied der ersten Proportion zum Hinterglied der letzten verhält, wie sich die Produkte der Vorderglieder sämmtl. Proportionen zu dem Produkte der Hinterglieder derselben verhalten, d. i.

a:e=cf:dg; und a:h=cfi:dgk;

man sagt daher, daß dieses erste Verhältniß aus den übrigen zusammengesetzt ist, d. i. das Verhältniß zwischen a:e ist aus den zwey Verhältnissen c:d und

f:g, dann a:h aus den drey Verhältnissen c:d, f:g und i:k zusammengesetzt.

7tens, Wenn ein Verhältniß aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist, wie z. B. $a:e=c^2:d^2$, (wenn man nemlich nach 6tens, auch b:e=c:d nimmt, oder $12:\frac{64}{3} = 3^2 : 4^2$, so nennt man dieses ein duplicirtes und wenn es aus dreyen gleichen zusammengesetzt ist, wie z. B. $a:b=c^3:d^3$, so nennt man es ein triplicirtes; und wenn dieses Verhältniß umgekehrt statt findet, d. i. wenn $c:d=\sqrt{a}:\sqrt{e}$ oder $3:4=\sqrt{12}:\sqrt{\frac{64}{3}}$ so nennt man es ein subduplicirtes, so wie $c:d=\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{e}$ ein subtriplicirtes Verhältniß des triplicirten.

8tens, Ein geom. Verhältniß heißt rational, wenn der Exponent desselben eine Rationalzahl ist, und irrationa'nal, wenn dieser ein Irrationalzahl ist. Das irrationale Verhältniß läßt sich (nach 3ten Zus. §. 101) auf ein rationales reduziren.

9tens, Hat der Exponent zweyer gleichen geom. Verhältnisse gleiches Zeichen, so heißen sie gleiche übereinstimmige, außerdem gleiche entgegengesetzte Verhältnisse.

10tens, Zwey gleich benannte Zahlen verhalten sich wie die Zahlen selbst; (nach §. 16, 5tens).

11tens, Bei einer Proportion benannter Zahlen müssen daher entweder alle Glieder, oder jedes Verhältniß für sich, oder auch die homologen Glieder unter sich gleiche Benennung haben, oder sich auf eine gleiche Benennung bringen lassen; und man kann, sobald diese Benennungen gleich sind, der Proportion unbeschadet, diese Benennungen weglassen.

12tens, Haben die Glieder der einen Seite der Proportion gleiche Zeichen, so müssen auch die der andern Seite gleiche Zeichen unter sich haben, und wenn die einen homologen Glieder gleiche Zeichen haben, so haben es auch die andern homologen Glieder derselben.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Proportionslehre.

§. 146.

Erklaerungen:

1tens, Wenn durch die Zunahme oder Abnahme eines Dinges auch im gleichen Verhältnisse die Zunahme oder Abnahme eines andern Dinges bedungen ist, so sagt man, sie stehen im geraden Verhältnisse zu einander, wie z. B.

a) die Menge der Waaren zu ihrem Preise,

b) die Zinsen zu der Größe eines Kapitals, dem Zinsfuße und der Länge der Zeit der Auslehnung,

c) die Anzahl der Arbeiter zu ihrer Arbeit und ihrem Lohne hiefür,

d) die Länge der Zeit zu einer Arbeit,

e) alle in einander resolvir- und reducirbaren Dinge, als Maaße, Gewichte und Münzen.

2tens, Wenn aber durch die Zunahme oder Abnahme eines Dinges, im gleichen Verhältnisse die Abnahme oder Zunahme eines andern Dinges bedungen ist, so sagt man, sie stehen im umgekehrten Verhältnisse zu einander, wie z. B.

a) bei gleicher Arbeit, die Anzahl der Arbeiter zu der Länge der Zeit, die sie hiezu nöthig haben,

b) die Länge zu der Breite eines Rechteckes (viereckigt rechtwinklichte Fläche) von gleichem Inhalte,

c) die Höhe zu der Grundfläche mehrerer Körper von gleichem Inhalte und Form,

d) die Anzahl der Menschen zu der Zeit, in welcher sie eine Menge von Lebensmitteln bedürfen.

Zusaetze:

1tens, Wenn also zwey Dinge im geraden Verhältnisse stehen, so bilden sie, wenn man sie nach 1tens ordnet, ge-

mäß 11ten Zuſ. des §. 145, eine Proportion; d. i. z. B. a Waaren verhalten ſich zu ihrem Preiſe von m Geld, wie b Waaren zu ihrem Preiſe von n Geld, giebt eine Proportion, indem man ſetzet:

a : m = b : n; oder a : b = m : n;

2tens, Wenn aber zwey Dinge im umgekehrten Verhältniſſe ſtehen, ſo bilden ſie eine Proportion, wenn man ſie nach 2tens gemäß 11ten Zuſ. des §. 145 ordnet; d. i. z. B. a Arbeiter verhalten ſich zu b Arbeitern, wie die für eine Arbeit nöthige n Arbeitszeit der letztern zu der hiezu nöthigen m Arbeitzeit der erſtern, alſo

a : b = n : m; oder a : n = b : m;

3tens, Trifft man dieſe Ordnung ſo, daß die, zu drey benannten Zahlen geſucht werdende vierte Proportionalzahl x, das letzte Glied wird, ſo heißt die Regel, nach welcher man dieſelbe findet, die Regel Detri (regula de tribus terminis), auch ihrer Anwendbarkeit wegen, die goldene Regel (regula aurea); und man unterſcheidet in Beziehung des geraden oder umgekehrten Verhältniſſes der darin verglichen werdenden Dinge, die ordentliche und die verkehrte Regel Detri.

4tens, Iſt das Verhältniß der zu ſuchenden Größe zu einer gegebenen, durch das bekannte Verhältniß zweyer, mit erſteren gleichnamigen, oder auf gleiche Benennung gebracht werden könnenden Größen beſtimmt, ſo nennt man die Regel Detri eine einfache, und iſt es aus zweyen oder mehreren Verhältniſſen (nach 6ten Zuſ. des §. 145) beſtimmt, eine zuſammengeſetzte, und zwar, wenn es aus zwey Verhältniſſen zuſammen geſetzt, alſo die zu ſuchende Größe durch 5 Glieder beſtimmt iſt, nennt man ſie regula quinque, und eben deßwegen, wenn es aus drey oder vier Verhältniſſen zuſammengeſetzt iſt, regula septem oder novem, u. ſ. w.

5tens, Man nennt auch die Regel Detri, je nachdem ſie auf gewiſſe Fälle angewendet wird, nach dem Betreffe derſelben; als z. B. (ſiehe §. 148) Zinsrechnung, Geſell-

schaftsrechnung, Vermischungsrechnung, Alligationsrechnung, u. s. w.

§. 147.

Aufgabe:

Die einfache Regel Detri anzugeben.

Auflösung:

1tens, Man untersuche nach der 1ten und 2ten Erklärung des §. 146, ob das Verhältniß der verglichen werdenden Größen ein gerades oder verkehrtes ist, ordne dann die Glieder hiernach, indem man

a) wenn dieses Verhältniß ein gerades ist, das Verhältniß der zu suchenden Größe x zu der gegebenen = dem Verhältniß der eben so wie x benannten oder auf eben solche Benennung gebracht werden könnenden bekannten Größen setzet, hingegen

b) wenn dieses Verhältniß ein umgekehrtes ist, das Verhältniß der zu suchenden Größe x zu einem Gliede des bekannten Verhältnisses = dem Verhältniß des andern Gliedes eben dieses bekannten Verhältnisses zu der gegebenen Größe, welcher x entsprechen soll, setzet, und dann die Proportion umkehret, weil (nach 3ten Zus. des §. 146) x das letzte Glied seyn soll, welches jedoch, um seinen Werth zu finden nicht nöthig ist, indem hiezu nach 1ten Zus. des §. 145 einerlei Verfahren zu beobachten ist.

2tens, Bringe durch Resolviren und Reduziren diejenigen Glieder auf einerlei und nur eine Benennung, welche solche nach 1ten und 2ten Zus. des §. 146 haben müssen, und behandle sie dann, wie bloße Zahlen.

3tens, Verkleinere die Glieder, und versetze die Nenner derselben als Factoren in andere Glieder, mittelst Anwendung des 5ten Zus. des §. 145, und

4tens, dividire das Produkt der mittleren Glieder durch das

erste Glied, oder, wenn man die nach 1^tens, a und b, zuerst angesetzte Proportion nicht umgekehrt hat, durch das vierte Glied, so erhält man die gesuchte Größe x, welche die nach 2^tens erhaltene Benennung erhält und dann (nach dem 1ten Zus. des §. 60) auf Größen verschiedener Benennungen gebracht werden kann.

Beispiele zur einfachen Regel Detri.

1.

a Ellen kosten m Gulden, wie viel fl. kosten b Ellen von der nemlichen Waare?

Auflösung:

Je mehr Ellen, desto mehr Gulden, daher (nach §. 30, 4^tens) das Verhältniß ein gerades, folgl.

fl.	Ellen		fl.	Ellen
x	: b	=	m	: a, also
x	: b	=	m	: a, und

$$x = \frac{mb}{a};$$

also $\frac{mb}{a}$ fl.

2.

a Cntr. kosten m fl.; wie viel Pfd. bekommt man für n kr.?

Auflösung:

Je mehr Cntr., desto mehr fl.

daher

Pfd.	kr.		Cntr.	fl.	
x	: n	=	a	: m,	d. i.
Pfd.	kr.		Pfd.	kr.	
x	: n	=	100a	: 60m,	also
x	: n	=	5a	: 3m,	und

$$x = \frac{5an}{3m}$$

also $\frac{5an}{3m}$ Pfunde.

3.

Zu einem Kleide braucht man ein Stück Tuch von a Länge und b Breite; wieviel Länge braucht man zu dem nemlichen Kleide (wenn man auf das Zusammensetzen der Theile keine Rücksicht nimmt), von einem Tuche von c Breite?

Auflösung:

Jemehr Länge, desto weniger Breite, daher das Verhältniß (nach §. 38, 7^{tens}_{n}) ein umgekehrtes, folgl.

Länge Breite Länge Breite

$$x : b = a : c, \text{ d. i.}$$

$$x : b = a : c, \text{ und}$$

$$x = \frac{ab}{c}$$

also $\frac{ab}{c}$ Länge.

4.

Wie viele Menschen langen b Tage mit einer Menge von Lebensmitteln, welche auf a Wochen m Menschen bedürfen?

Auflösung:

Jemehr Menschen, desto weniger Zeit ist hiezu nöthig, daher

Menschen, Menschen Wochen, Tage

$$x : m = a : b, \text{ d. i.}$$

Tage Tage

$$x : m = 7a : b, \text{ also}$$

$$x : m = 7a : b,$$

$$x = \frac{7am}{b}$$

also $\frac{7am}{b}$ Menschen.

Zusatz:

1tens, Die Aufgaben zur einfachen Regel Detri können auch aufgelöset werden, indem man aus dem bekannten Verhältniße bestimmt, wie viel das Einfache der fraglichen

Größe beträgt und aus diesem das verlangte Vielfache oder den verlangten Theil dieses Einfachen (nach §. 64) bestimmt; z. B. vorige vier Aufgaben werden hiernach gelöset, indem man setzet

1.

a Ellen kosten m fl.; also

1 Elle kostet $\frac{m}{a}$ fl. und

b Ellen kosten $\frac{mb}{a}$ fl.

2.

a Cntr. kosten m fl., d. i.

100a Pfd. = 60m kr. also

$\frac{100a}{60m}$ = = 1 kr. und

$\frac{5an}{3m}$ = = n kr.

3.

a Länge bei b Breite, also

ab = = 1r = ; und

$\frac{ab}{c}$ = = c = ;

4.

a Wochen bedürfen m Menschen, d. i.

7a Tage = m = , also

1 = = 7am = und

b = $\frac{7am}{b}$ = ;

2tens, Die Aufgaben zur Regel Detri können auch durch Gleichungen gelöset werden, z. B. die gegebenen, wie folgt.

1.

Da der Preis 1r Elle in beyden Fällen gleich ist, so ist

$$\frac{m}{a} = \frac{x}{b} \text{ und}$$

$$\frac{mb}{a} = x.$$

2.

Da der Preis eines Pfds. in beyden Fällen gleich ist, so ist

$$\frac{60m}{100a} = \frac{n}{x},$$

$$60mx = 100an \text{ und}$$

$$x = \frac{100an}{60m} = \frac{5an}{3m}.$$

3.

Nach der Geometrie giebt das Produkt der Länge mit der Breite, den Inhalt der Tuchfläche, und da diese für beyde Fälle gleich ist, so ist

$$ab = cx, \text{ und}$$

$$\frac{ab}{c} = x;$$

4.

Das Produkt aus der Anzahl der Menschen mit der Zahl einer bestimmten Zeit, giebt diejenige Zahl, womit man die Menge der, für einen Menschen auf eine solche Zeiteinheit nöthigen Lebensmittel multipliciren muß, um die Menge der, für eine Anzahl von Menschen auf diese bestimmte Zeit nöthigen Lebensmittel zu erhalten. Da nun diese Menge in den beyden gegebenen Fällen gleich ist, so müssen auch die genannten Produkte gleich seyn, d. i.

$$7am = bx, \text{ also}$$

$$\frac{7am}{b} = x;$$

§. 148.

Erklärungen:

1tens, Wenn man jemand eine Summe Geldes zu seiner Anwendung verlehnt, so fordert man gewöhnlich für eine gewisse Zeit eine gewisse Summe dafür, und man nennt

a) die vorgelehnte Summe das Kapital,

b) die auf ein Jahr für 100 fl. Kapital geforderte Vergütung, die Procente, und die hiernach für das ganze Kapital zu erhaltende Vergütung, die Interessen oder den Zins, welcher gewöhnlich in bestimmten Terminen zu bezahlen ist; der Zins heißt:

α) einfacher Zins, wenn für eine Verspätung in Einhaltung der Zinstermine, nichts vergütet, der Zins also blos vom Kapitale bezahlt wird; hingegen

β) Zinseszins, wenn der Zins von der Zeit an, wo er hätte bezahlt werden sollen, bis zur wirklichen Bezahlung, ebenso wie das Kapital verzinset wird.

c) Die Rechnung mit nur einfachen Zinsen die einfache Zinsrechnung, und die mit Zinseszinsen die zusammengesetzte Zins- oder Interusurien-Rechnung.

2tens, Die Regel, welche angiebt, wie man eine Zahl in mehrere Theile nach einem gewissen Verhältnisse theilen soll, heißt, wenn dadurch ein gemeinschaftlicher Gewinn oder Verlust einer Gesellschaft, gemäß der Einlage der Mitglieder vertheilt werden soll, Gesellschaftsrechnung, und zwar einfache, wenn die Zeit der Einlage bei denen Mitgliedern gleich, oder keine Rücksicht auf deren Ungleichheit genommen werden soll, hingegen zusammengesetzte, wenn auf vorhandene Ungleichheit dieser Einlagezeit Rücksicht genommen werden soll; und

3tens, wenn dadurch die Menge der verschiedenen Bestand-

theile bestimmt werden soll, woraus eine Masse nach gegebenen Verhältniß zusammengesetzt werden soll, heißt sie Vermischungsregel.

4tens, Wenn aber zwey oder mehrere Dinge so gemischt werden sollen, daß ein gegebener Zwischenwerth herauskomme, so heißt die Regel, welche die Verfahrungsart hiezu angiebt, Alligationsregel.

§. 149.

Aufgabe:

Wenn man bei der einfachen Zinsrechnung (§. 148, 1tens) das Kapital mit K, die Prozente mit P, die Jahre, während das Kapital ausgelehnt und zu verzinsen ist, mit N, die Interessen in dieser Zeit mit I, und das Kapital K mit denen Interessen I, durch S bezeichnet; welche Formeln erhält man für S, K, P und N, um daraus aus dreyen von ihnen die vierte zu finden?

Auflösung:

In 1 Jahr giebt 100 fl. P Prozente, also
= N Jahren = 100 = NP = , es ist daher

$$100 : NP = K : I$$

$$I = \frac{NPK}{100}; \text{ und}$$

$$I)\ S = K + I = K + \frac{NPK}{100} = \frac{(100+NP)K}{100};$$

woraus sich ergiebt, daß

$$II)\ K = \frac{100S}{100+NP};$$

$$III)\ P = \frac{100(S-K)}{KN};$$

$$IV)\ N = \frac{100(S-K)}{KP};$$

ist, wodurch die Aufgabe gelöset ist.

Zusätze:

1tens, Würde man P anstatt von 100, von q erhalten, so

hätte man in obigen Formeln auch statt 100 immer q zu setzen.

2tens, Würde K die jährliche Zunahme $\frac{P}{q}.K$ und die Abnahme $\frac{R}{q}.K$, also die Zunahme $\frac{P-R}{q}.K$ erhalten, so würde $S = \frac{q+N(P-R)}{q} K$.

§. 150.

Aufgabe:

Wenn man bei zwei ausgelehnten Kapitalien, das eine Kapital mit K, dessen Prozente mit P, die Interessen mit I, und die Zeit der Auslehnung mit N, dann das andere Kapital mit k, dessen Prozente mit p, die Interessen mit i, und die Zeit der Auslehnung mit n bezeichnet, und zwey von diesen Größen gegenseitig gleich sind; wie heißen dann die Formeln, wonach man eine davon unbekannte Größe, aus den davon bekannten, berechnen kann?

Auflösung:

1tens, Wenn Zeit und Interessen gegenseitig gleich sind, so ist

k : K = P ; p, denn je größer das Kapital, desto weniger Prozente sind zu gleichen Interessen bei gleicher Zeit nöthig; also

$$\text{I, } k = \frac{KP}{p};$$

$$\text{II, } p = \frac{KP}{k};$$

2tens, Wenn die Prozente und Interessen gegenseitig gleich sind, so ist

k : K = N ; n, denn je größer das Kapital, desto weniger Zeit ist nöthig, um bei gleichen Prozenten gleiche Interessen zu bringen; daher

III, $k = \frac{KN}{n}$;

IV, $n = \frac{KN}{n}$;

3tens, Wenn Zeit und Prozente gleich sind, so ist
k : K = i : I, denn je größer das Kapital, desto mehr Interessen bringt es bei gleichen Prozenten in gleicher Zeit, also

V, $k = \frac{iK}{I}$;

VI, $i = \frac{kI}{K}$;

4tens, Wenn Kapital und Interessen gleich sind, so ist
p : P = N : n, denn je mehr Prozente, desto weniger Zeit ist zu gleichen Interessen bei gleichen Capitalien nöthig; also

VII, $p = \frac{PN}{n}$;

VIII, $n = \frac{PN}{p}$;

5tens, Wenn Kapital und Zeit gleich ist, so ist
p : P = i : I, denn je mehr Prozente, desto mehr Interessen in gleicher Zeit bei gleichen Kapitalien; daher

IX, $p = \frac{iP}{I}$;

X, $i = \frac{pI}{P}$;

6tens, Wenn Kapital und Prozente gleich sind, so ist
n : N = i : I, denn je mehr Zeit, desto mehr Interessen bringen bei gleichen Prozenten gleiche Kapitalien; also

XI, $n = \frac{iN}{I}$; und

XII, $i = \frac{nI}{N}$;

wodurch der Aufgabe entsprochen ist.

§. 151.

Aufgabe:

Eine Zahl A in drey Theile x, y und z zu theilen, die sich gegen einander, wie die gegebenen Zahlen a, b und c verhalten.

Auflösung:

Es soll a:b=x:y; b:c=y:z, und x+y+z=A seyn, daher ist (nach 4ten Lehrs. des §. 144) a:x=b:y=c:z, und nach 9ten Lehrs. des §. 144; (a+b+c):(x+y+z)=a:x=b:y=c:z,

d. i. (a+b+c): A =a:x=b:y=c:z;

welches folgende Regel giebt:

1tens, Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen,

2tens, setze die Proportion »die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zu der theilenden Zahl, wie sich jede Verhältnißzahl zu der, ihr hiernach entsprechenden Zahl verhält« an, und

3tens, berechne hieraus die verlangten Theile.

Zusätze:

1tens, Dieselbe Regel ergiebt sich auch für mehr, als drey Theile, und

2tens, auf die Gesellschaftsrechnung angewendet, heißt sie »die ganze Einlage verhält sich zum ganzen Gewinnst oder Verlust, wie die Einlage eines Jeden, zu dem ihn treffenden Gewinnst oder Verlust«, und

3tens, auf die Vermischungsregel angewandt, heißt sie »die Summe aller Theile, welche zu einer gewissen Masse gehören, verhält sich zu der Summe der zu bereitenden Masse, wie die Summe der Theile jeder einzelnen Sa-

che, die zur ersteren Masse genommen wird, zu den ihr hiernach entsprechenden Theilen dieser nemlichen Sache, die zu der zu bereitenden Masse zu nehmen ist«;

4tens, Obige Aufgabe giebt die Gleichungen $x+y+z = A$;

$y = \frac{b}{a} x$; und $z = \frac{c}{b} y$; (nach 3ten Zus. des §. 130), daher die Gleichung $x + \frac{b}{a} x + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} x = A$,

woraus hervorgeht, daß auch die Aufgaben zur Gesellschafts-Rechnung und Vermischungsregel durch eine einfache Gleichung gelößt werden können.

Beispiel zur einfachen Gesellschafts-rechnung.

3 Kaufleute haben eine Handlung angelegt, wozu der erste 6000 fl., der zweyte 8000 fl. und der dritte 4500 fl. gegeben hat, sie wollen nun ihren nach einem Jahre gemachten Gewinn von 2560 fl. theilen, wieviel erhält jeder?

Auflösung:

(6000+8000+4500):2560=6000:a=8000:b=4500:c, d. i.

(60+80+ 45) :2560=60 :a=80 :b=45 :c,

37 :512 =60 :a=80 :b=45 :c, also

$$a = \frac{60.512}{37} = 830\frac{10}{37} \text{ fl.};$$

$$b = \frac{80.512}{37} = 1107\frac{1}{37} \text{ fl.};$$

$$c = \frac{45.512}{37} = 622\frac{26}{37} \text{ fl.};$$

Beispiel zur Vermischungsregel.

Zu einem guten Schießpulver gehören 16 Theile Salpeter, 2 Theile Schwefel und 3 Theile Kohlen; wie viel von jeder Art gehören zu 100 Pfd. dergleichen Pulver?

Auflösung:

(16+2+3) : 100 = 16 : x = 2 : y = 3 : z, also

$x = \frac{1600}{21} = 76\frac{4}{21}$ Pfd. Salpeter,

$y = \frac{200}{21} = 9\frac{11}{21}$ Pfd. Schwefel,

$z = \frac{300}{21} = 14\frac{6}{21}$ Pfd. Kohlen.

5tens, Auch durch Anwendung des §. 64 können diese Aufgaben, wie die der Regel Detri nach 1ten Zuf. des §. 147, aufgelöset werden, nemlich:

Erstens

18500 fl. gewinnen 2560 fl., also

1 fl. $= \frac{2560}{18500} = \frac{512}{3700}$ fl., und

6000 fl. $= \frac{60.512}{37}$ fl.; dann

8000 fl. $= \frac{80.512}{37}$ fl.; und

4500 fl. $= \frac{45.512}{37}$ fl.

Letzteres.

	Salpeter	Schwefel	Kohlen	
Zu 21 Pfd. Pulver nimmt man	16 Pfd.	2 Pfd.	3 Pfd.	also
= 1 = = = =	$\frac{16}{21}$	$= \frac{2}{21}$	$= \frac{3}{21}$	= und
= 100 = = = =	$\frac{1600}{21}$	$= \frac{200}{21}$	$= \frac{300}{21}$	=

§. 152.

Aufgabe:

Es soll die Alligationsregel angegeben werden, mittelst der man durch Proportion findet, wie viel man von jeder der zwey Sachen, wovon die eine einen Werth a, die ande-

re einen höheren Werth b hat, nehmen muß, um daraus eine aus c Theilen bestehende Mischung von einem Zwischenwerth d zu erhalten.

Auflösung:

Hat man von der geringeren Sache x, und von der besseren y Theile zu nehmen, so ist

$x+y=c$; und $ax+by=ad$; daher

$(b-a)x=c(b-d)$, und $(b-a)y=c(d-a)$; folglich

$(b-a):c=(b-d):x=(d-a):y$;

welches folgende Regel giebt;

1tens, Man setze die Proportion, »die Differenz des Werthes der besseren Sache und des Werthes der geringeren Sache, verhält sich zu der mischen wollenden ganzen Menge, wie sich die Differenz des Werthes der besseren Sache und des verlangten Werthes, zu der von der geringeren Sache zu nehmenden Menge verhält, und wie sich die Differenz des verlangten Werthes und des Werthes der geringern Sache, zu der von der bessern Sache zu nehmenden Menge verhält; und

2tens, bestimme daraus die von jeder Sache zu nehmenden Menge.«

Zusatze:

1tens, Aus obigen Gleichungen geht auch die Proportion $x:y=(b-d):(d-a)$ hervor, welche auch zur Auflösung der Aufgaben für die Alligationsregel angewendet werden kann, vorzüglich wenn x oder y bestimmt, und y oder x zu suchen ist.

2tens, Für mehr, als zwey Sachen, giebt eine Aufgabe nur unbestimmte Gleichungen, welche nach §. 137 aufgelöset werden.

Beispiele zur Alligationsregel.

1tens, Aus zwey Weinen zu 30 und 20 kr. will man einen Eimer zu 60 Maaß so mischen, daß die Maaß 24 kr. kostet, wieviel muß man von jeder Sorte hiezu nehmen?

Auflösung:

$10:60 = 6:x = 4:y$, d. i.

$1:6 = 6:x = 4:y$, und

$x = 36; y = 24;$

daher man von der besseren 24 und von der geringern Sorte 36 Maaß zu nehmen hat.

Oder:

nach 1ten Zus. ist $x:y = 6:4 = 2:3$, daher man von der bessern 2 und von der geringern Sorte 3 Theile, also $\frac{2}{5}.60$ und $\frac{3}{5}.60$, d. i. 24 und 36 Maaß zu nehmen hat.

2tens, Wie viel 9löthiges Silber muß man zu 8 Mark feinem Silber, d. i. 16löthigem setzen, um 12löthiges zu erhalten?

Auflösung:

Nach 1ten Zus. ist

$x:8 = (16-12):(12-9)$

$= 4 : 3$

also $x = \frac{4 \cdot 8}{3} = 10\frac{2}{3}$ Mark.

3tens, Von 3 Eimern Wein ist die Maaß 30 kr. werth, wie viel muß man Wasser dazu schütten, daß die Maaß 24 kr. werth ist;

Auflösung:

Nach 1ten Zus. ist

$x:180 = (30-24):24;$

$= 6:24;$

$= 1:4;$

$x = \frac{180}{4} = 45$ Maaß.

§. 153.

Erklärung:

Ist die unbekannte Größe x einer Aufgabe durch das Resultat bestimmt, welches man aus von ihr angegebenen Verhältnissen erhält, und man berechnet für irgend eine willkührliche Zahl (numerus falsus) den Werth, welcher derse-

ben nach der Aufgabe zukommt, wenn man die nemlichen Veränderungen, welche mit der unbekannten vorzunehmen sind, mit ihr vornimmt, und setzt dann die Proportion »der aus der angenommenen Zahl erhaltene Werth verhält sich zur angenommenen Zahl, wie das in der Aufgabe angegebene Resultat der unbekannten Größe, zur unbekannten Größe selbst« an, und bestimmt daraus x, so nennt man diese Art die Regula falsi; z. B.

1.

Aufgabe:

In wie viel Jahren werden die Interessen eines Kapitals zu $3\frac{1}{2}$ proCt. $\frac{3}{4}$ Theile desselben betragen?

Auflosung:

In 1 Jahr betragen die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ proCt. $\frac{7}{200}$ des Kapitals, daher

$$\frac{7}{200} : 1 = \frac{3}{4} : x$$

$$x = \frac{3 \cdot 200}{4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 50}{7} = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7};$$

also in $21\frac{3}{7}$ Jahren.

2.

Aufgabe:

Man kauft ein Grundstück, verkauft es um 3465 fl., und gewinnt dadurch $\frac{2}{7}$ des Einkaufpreises; wie theuer war es gekauft?

Aufloesung:

War es um 7 fl. gekauft, so ist der Verkaufpreis 9 fl., daher

$$9 : 7 = 3465 : x; \text{ daher}$$

$$x = \frac{7 \cdot 3465}{9} = 7 \cdot 385 = 2695;$$

also war es um 2695 fl. gekauft.

Zusatz:

Die Anwendung der Regula falsi ist durch die Algebra vorzüglich unnöthig.

§. 154.

Aufgabe:

Das Verfahren der zusammengesetzten Regel Detri (4ten Zus. des §. 146), anzugeben.

Auflösung:

1tens, Man untersuche, wie bei der einfachen Regel Detri, das Verhältniß der suchenden Zahl x, zu jeder einzelnen mit ihr ungleichnamigen Größe, von welcher ihre Quantität abhängt, indem man hiebei jederzeit alle übrigen Größen oder gegebenen Verhältnißzahlen, von denen dieselbe gleichfalls abhängt, als gleich in dem bekannten und in dem gegebenen Falle annimmt, und setze das Verhältniß von x zu der ihr gleichnamigen Zahl, gleich jedem hiernach erhaltenen Verhältniß der, unter sich gleichnamigen und auf einerlei und nur eine Benennung gebrachten Größen, von denen der Werth von x abhängt, und schreibe solche letztere unter einander.

2tens, Verkleinere dann die Zahlen, von denen man ihre Benennung wegläßt, wie bei der einfachen Regel Detri, und betrachte hiebei die ober einanderstehenden Zahlen als Factoren, und

3tens, multiplicire zuletzt, gemäß 4ten Zus. des §. 130, alle ober einanderstehenden Zahlen, und bestimme aus der dadurch erhaltenden zusammengesetzten Proportion den Werth von x.

§. 155.

Zusaetze:

1tens, Jede Größe z, die nach 4ten Zus. des §. 130 durch ein zusammengesetztes Verhältniß bestimmt ist, also auch jedes Beispiel der zusammengesetzten Regel Detri läßt sich durch die einfache Regel Detri berechnen, denn, wenn z. B. z:h = abc:def, so kann man nach 6ten Zus. des §. 145.

$$x : h = a : d$$
$$y : x = b : e$$
$$z : y = c : f$$

setzen, und durch Berechnung des Werthes von x, den von y, und dann den von z finden.

2tens, Man kann also auch die Aufgaben zur zusammengesetzten Proportionslehre so, wie die der einfachen, durch Gleichungen, und Anwendung des §. 64 auflösen, ohne hiezu bei schon gewonnener Leichtigkeit im richtigen Ansatze derselben, mehr Zeit nöthig zu haben, als durch Anwendung der Proportionslehre erforderlich ist, daher auch die, bei den Proportionen geschehene Vormerkung gerechtfertiget seyn wird.

3tens, Setzt man die, nach §. 154, 1tens, unter einander gesetzten Verhältnisse, jedes umgekehrt, unter das Verhältniß der unbekannten zu der ihr gleichnamigen Größe, so ist das Produkt der ober einander stehenden vordern Zahlen, dem Produkte der ober einander stehenden hintern Zahlen gleich; und man kann also, wenn man diese Zahlen durch einen senkrechten Strich, welcher das Gleichheitszeichen vertritt, von einander trennt, die vordern und hinteren Zahlen gegen einander verkleinern und jeden Nenner der einen Seite als Factor auf die andere Seite setzen, und dann x dadurch bestimmen, daß man das Produkt der Zahlen der hintern Seite durch das Produkt der Zahlen der vordern Seite (ohne x) dividirt. Dieses Verfahren ist die so berühmte Reesische Regel, von einem Holländer de Rees zuerst bekannt gemacht.

4tens, Hat man in einer Aufgabe zur zusammengesetzten Proportionslehre, die einzelnen Proportionen erhalten, aus welchen nach 6ten Zus. des §. 145 eine zusammengesetzte gebildet werden kann, oder löst man die erhaltene zusammengesetzte Proportion in ihre einfachen nach 1ten Zus. auf, verwandelt diese einzelnen Proportionen in Gleichungen und setzt solche ebenso, wie in der Ree-

sischen Regel an, indem man immer als nächstes vorderes Glied dasjenige setzet, welches die Benennung des vorangegangenen Hinterngliedes erhielt, und dieß so lange, bis das letzte Hinterglied die Benennung des ersten Vordergliedes, d. i. der suchenden Zahl x erhält, so kann man alle solche Benennungen weglassen, die Zahlen vor und hinter dem Strich, wie bei der Reesischen Regel verkleinern, und zuletzt das Produkt der hintern Zahlen, dividirt durch das Produkt der vorderen Zahlen, gleich der suchenden Zahl x setzen, und hieraus die Aufgabe lösen. Dieses Verfahren nennt man die Kettenregel.

§. 156.

Beispiele der zusammengesetzten Proportionslehre.

1.

Aufgabe:

Es soll der Ansatz der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung (Erkl. 2. des §. 148) angegeben werden.

Auflösung:

Soll z. B. der Gewinn A in 3 Theile x, y und z getheilt werden, die sich gegen einander, wie die Einlagen a, b und c, und wie die Zeiten m, n und r derselben, also wie die Produkte ma, nb und rc verhalten, so ist wie bei §. 151

$$ma : x = nb : y = rc : z \text{ und}$$

$$(am + nb + rc) : (x + y + z) = ma : x = nb : y = rc : z;$$

»Man setze also, die Summe der Produkte in die Zeiten, verhält sich zum ganzen Gewinn, wie jedes einzelne Produkt zu dem hierauf treffenden Gewinn« z. B.

Wenn drey Kaufleute eine Handlung angelegt und darin 2560 fl gewonnen haben, der erste hiezu 6000 fl. 7 Monate lang, der zweyte 8000 fl. 4 Monate lang, und der dritte 4500 fl. 9 Monate lang hiezu gegeben hatte, wieviel erhält Jeder von diesem Gewinn?

Es ist

$$(7.6000+4.8000+9.4500):2560 = 7.6000:x$$
$$= 4.8000:y$$
$$= 9.4500:z$$

d. i. $(7.60+4.80+9.45):2560 = 7.60:x = 4.80:y = 9.45:z$

$$229:512 = 420:x = 320:y = 405:z$$

Also der 1te $x = \frac{512 \cdot 420}{229} = 939\frac{9}{229}$ fl.

" 2te $y = \frac{512 \cdot 320}{229} = 715\frac{105}{229}$ fl.

" 3te $z = \frac{512 \cdot 405}{229} = 905\frac{115}{229}$ fl.

Oder: Diese Aufgabe durch Anwendung des §. 64. aufgelößt, giebt:

a Einlagen m Zeit lang ist soviel, als ma Einlagen 1. Zeit-lang, u. s. w.; es gewinnen daher

(ma+nb+rc) Einlagen, A fl.

$$1 = \frac{A}{ma+nb+rc} \text{ fl.}$$

$$ma = \frac{maA}{ma+nb+rc} \text{ fl.}$$

$$nb = \frac{nbA}{ma+nb+rc} \text{ fl.}$$

$$rc = \frac{rcA}{ma+nb+rc} \text{ fl.}$$

2.

Aufgabe:

Wenn 100 Mann in 4 Tagen einen Graben von 300 Klft. Länge, 8 Schuh Breite, und $3\frac{1}{2}$ Schuh Tiefe verfertigen; in wieviel Tagen werden 400 Mann einen Graben von 450 Klft. Länge, 1 Klft. Breite und 4 Schuh Tiefe graben?

Auflösung:

Nach §. 154 ist hiernach, da

je mehr Tage gearbeitet wird, desto weniger Mann nöthig sind,
= = = = = = länger der Graben wird
= = = = = = breiter = = =
= = = = = = tiefer = = =

x Tage : 4 Tage = 100 Mann : 400 Mann
= 450 Clft. L. : 300 Clft. Länge
= 6 Schuh B. : 8 Schuh Breite
= 4 = T. : $3\frac{1}{2}$ = Tiefe

$$\text{also } x = \frac{4.100.450.6.4}{400.300.8.3\frac{1}{2}} = \frac{45.6.4}{30.8.3\frac{1}{2}} = \frac{3.6.2}{2.2.7}$$

$$x = \frac{3.6}{2.7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7} \text{ Tage.}$$

Oder nach der Reesischen Regel (§. 155, 3tens) angesetzt, heißt es

x Tage	4 Tage
400 Mann	100 Mann
300 Clft. Lg.	450 Clft. L.
8 Sch. B.	6 Schuh B.
$3\frac{1}{2}$ Sch. T.	4 Schuh T.

Und nach §. 64. berechnet, sagt man, da das Produkt der Länge, Breite und Tiefe den Cubik-Inhalt des Grabens anzeigt, und 1 Clftr. = 6 Fuß ist,

6.300.8.$3\frac{1}{2}$ Cubikfuß fertigen 100 Mann in 4 Tagen, d. i.
6.300.8.$3\frac{1}{2}$ = = 400 = = 1 = , also
1 = = 400 = $\frac{1}{6.300.8.3\frac{1}{2}}$, demnach
6.450.6.4 = = 400 = = $\frac{6.450.6.4}{6.300.3.3\frac{1}{2}}$.

Dann durch einfache Regel Detri Ansätze berechnet, ist die Auflösung folgende:

a) Wenn 100 Mann in 4 Tagen einen Graben verfertigen, wieviel Tage brauchen 400 Mann zu demselben Graben? d. i.

$$x : 4 = 100 : 400$$
$$x = 1.$$

b) Wenn in $x=1$ Tage ein Graben von 300 Clft. Länge verfertiget wird, in wie viel Tagen verfertigen dieselben Arbeiter einen dergleichen Graben von 450 Clft. Länge? d. i.

$$y : 1 = 450 : 300;$$
$$y = \tfrac{3}{2}.$$

c) Wenn in $y = \frac{3}{2}$ Tagen ein Graben von 8 Schuh Breite verfertiget wird, in wieviel Tagen verfertigen dieselben Arbeiter einen eben solchen Graben von 1 Clftr. = 6 Schuh Breite? d. i.

$$z : \tfrac{3}{2} = 6 : 8;$$
$$z = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 8} = \tfrac{9}{8};$$

d) Wenn in $z = \frac{9}{8}$ Tagen ein Graben von $3\frac{1}{2}$ Schuh Tiefe verfertiget wird, in wieviel Tagen verfertigen dieselben Arbeiter einen dergleichen Graben von 4 Schuh Tiefe? d. i.

$$u : \tfrac{9}{8} = 4 : 3\tfrac{1}{2},$$
$$u : \tfrac{9}{8} = 8 : 7$$
$$u : \tfrac{9}{7} = 1\tfrac{2}{7};$$

3.

Aufgabe:

Es ist durch die Kettenregel (§. 155, 6tens) zu berechnen, wie viele Kronenthaler 5 Entr. kosten, wenn 3 Loth 2 ℔ kosten?

Man setze:

	x Krthlr.	=	5 Ctr.
wenn	1 Ctr.	=	100 Pfd.
	1 Pfd.	=	32 Loth
	3 Lth.	=	2 ℔
	4 ℔	=	1 kr.
	102 kr.	=	1 Krthlr.

d. i.

x	5
1	100
1	328 und $x = \frac{5.100.8}{3.81} = 16\frac{112}{243}$ Krthlr.
3	2
4	1
162	1
81	

4.

Aufgabe:

Es sollen bei zwei ausgelehnten Kapitalien, wobei Alles wie im §. 150 bezeichnet, die Formeln entwickelt werden, woraus man eine davon unbekannte Größe bestimmen kann, wenn bei beyden Kapitalien eine dieser Größen gegenseitig gleich ist.

Auflosung:

1tens, Wenn die Interessen gleich sind, so ist

$k : K = N : n$, nach §. 150, 2tens,

$= P : p$, nach §. 150, 1tens, dah. nach 4ten Zus. des §. 130.

$k : K = NP : np$, und

$$\text{I, } k = \frac{NPK}{np}$$

$$\text{II, } n = \frac{NPK}{pk}$$

$$\text{III, } p = \frac{NPK}{nk};$$

2tens, Wenn die Anzahl der Jahre d. i. die Auslehnungszeit gleich ist, so ist

$k : K = i : I$, nach §. 150, 3tens, und

$= P : p$, nach §. 150, 1tens, daher

$k : K = iP : Ip$, und

$$\text{IV, } k = \frac{PiK}{pI};$$

$$\text{V, } i = \frac{KpI}{PK};$$

$$\text{VI, } p = \frac{iPK}{kI};$$

3tens, Wenn die Prozente gleich sind, so ist

k : K = i : I, nach §. 150, 3tens, und

= N : n, nach §. 150, 2tens, daher

---

k : K = iN : In, und

$$\text{VII, } k = \frac{KiN}{In};$$

$$\text{VIII, } i = \frac{kIn}{KN};$$

$$\text{IX, } n = \frac{KiN}{kI};$$

4tens, Wenn die Kapitalien gleich sind, so ist

i : I = n : N, nach §. 150, 6tens, und

= p : P, nach §. 150, 5tens, daher

---

i : I = np : NP, und

$$\text{X, } i = \frac{npI}{NP};$$

$$\text{XI, } n = \frac{iNP}{pI};$$

$$\text{XII, } p = \frac{jNP}{nI};$$

VI.

Von den Reihen oder Progressionen.

Erster Abschnitt.

Von den Progressionen im Allgemeinen.

§. 157.

Erklärungen:

1tens, Mehrere Größen, die nach einem allgemeinen Gesetze zu- oder abnehmen und daher jede nach demselben bestimmt ist, nennt man eine Reihe oder Progression, die einzelnen Größen ihre Glieder, und den Ausdruck dieses Gesetzes das allgemeine Glied.

2tens, Nehmen die Glieder zu, so heißt die Reihe steigend oder divergirend, und nehmen solche ab, heißt sie fallend oder convergirend, ist die Anzahl der Glieder bestimmt, heißt sie endlich, und lassen sich nie alle Glieder bestimmen, heißt sie unendlich oder ein Infinitomium.

3tens, Eine Reihe, bei welcher der Unterschied (Differenz) der Glieder gleich ist, heißt eine arithmetische und die, bei welcher der Quotient der Glieder gleich ist, eine geometrische Progression.

Zusätze:

1tens, Progressionen sind nichts anders als nach 4ten Zus. des §. 141 ausgedrückte stetige Proportionen von mehr, als drey Gliedern.

2tens, Eine arithmetische Reihe ist daher unter der Formel

$$a,\ a+D,\ a+2D,\ a+3D,\ u.\ s.\ w.$$

enthalten, und

3tens, eine geometrische Reihe ist unter der Formel

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \text{u. s. w.}$$

begriffen.

Zweyter Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 153.

Lehrsaetze:

Aus der Formel einer arithmetischen Reihe (§. 157 Zus. 2) geht hervor:

1tens, Das allgemeine Gesetz einer arithmetischen Reihe ist »jedes Glied ist dem ersten Gliede + der so vielfachen Differenz, als Glieder vorangehen, gleich«;

Zusatz:

Bezeichnet man die gleiche Differenz mit D, die Anzahl der Glieder mit n, das erste Glied mit a, das letzte mit w, so ist daher

$$w = a + (n-1)\,D;$$

2tens, In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe jeder zwey, von dem ersten und letzten Gliede gleichentfernter Glieder, der Summe dieses ersten und letzten Gliedes gleich, daher ist die Summe S einer dergleichen Reihe von gerader Glieder-Anzahl, d. i. von $\frac{n}{2}$ Paar, der Summe des ersten und letzten Gliedes gleichen Gliedern, $= \frac{n}{2}(a+w)$; d. i.

$$S = \frac{n}{2}(a+w).$$

3tens, Das mittlere Glied m einer arithm. Reihe von ungerader Glieder-Anzahl n, ist $= \frac{a+w}{2}$; daher, da die

Summe der übrigen $n-1$ Glieder nach 2^{tens}, $= \frac{n-1}{2}$

$(a+w)$ ist, so ist die Summe S aller Glieder $= \frac{n-1}{2}$

$(a+w) + \frac{a+w}{2}$, d. i.

$$S = \frac{n}{2}(a+w);$$

Zusatze:

1^{tens}, Aus 2^{tens} und 3^{tens} folgt, daß die Summe einer jeden arithm. Reihe, d. i.

$$S = \frac{n}{2}(a+w),$$

ist.

2^{tens}, Aus dem in obigen beyden Zusätzen angegebenen Gleichungen lassen sich, wenn von denen fünf Größen a, w, D, n und S, drey bekannt sind, die übrigen zwey durch Rechnung finden, und will man sie zur Auffindung einer, bei einer arithm. fallenden Reihe unbekannten Größe anwenden, so hat man entweder w für das 1te und a für das letzte Glied, oder D negativ zu nehmen.

§. 159.

Aufgabe:

Es sollen die Formeln angegeben werden, woraus man jede unbekannte Größe einer arithm. Reihe, durch, drey davon bekannte finden kann.

Auflösung:

Nach vorigem §. ist:

1^{tens}, $w = a + (n-1)D$;

2^{tens}, $S = \frac{n}{2}(a+w)$; daher aus 1^{tens},

3^{tens}, $a = w - (n-1)D$;

4^{tens}_{u}, $D = \frac{w-a}{n-1}$;

5^{tens}_{u}, $n = \frac{w-a}{D} + 1$; und aus 2^{tens}_{u}, ist

6^{tens}_{u}, $n = \frac{2S}{a+w}$;

7^{tens}_{u}, $a = \frac{2S}{n} - w$;

8^{tens}_{u}, $w = \frac{2S}{n} - a$;

Aus Vergleichung von 1^{tens}_{u} und 8^{tens}_{u} ist

$a + (n-1)D = \frac{2S}{n} - a$, daher

$(n-1)D = \frac{2(S-an)}{n}$;

9^{tens}_{u}, $D = \frac{2(S-an)}{n(n-1)}$;

$2S - 2an = n(n-1)D$;

10^{tens}_{u}, $S = n(a + \frac{D}{2}(n-1))$;

11^{tens}_{u}, $a = \frac{S}{n} - \frac{D}{2}(n-1)$;

$2S - 2an = Dn^2 - Dn$

$n^2 + (\frac{2a}{D} - 1)n = \frac{2S}{D}$;

$n^2 + (\frac{2a}{D} - 1)n + (\frac{a}{D} - \frac{1}{2})^2 = \frac{2S}{D} + \frac{a^2}{D^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{D}$;

$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{D} + \sqrt{(\frac{2S}{D} + \frac{a^2}{D^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{D})}$;

12^{tens}_{u}, $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{D} + \sqrt{(\frac{2S}{D} + \frac{1}{4} + (\frac{a}{D} - 1)\frac{a}{D})}$;

Aus Vergleichung von 3^{tens} und 7^{tens}, ist

$$w-(n-1)D=\frac{2S}{n}-w, \text{ daher}$$

$$13^{tens}, w=\frac{S}{n}+\frac{D}{2}(n-1);$$

$$14^{tens}, D=\frac{2(nw-S)}{n(n-1)};$$

$$2nw-n(n-1)D=2S$$

$$15^{tens}, S=n\left(w-\frac{D}{2}(n-1)\right);$$

$$2S=2wn-Dn^2+Dn;$$

$$n^2-\left(\frac{2w}{D}+1\right)n+\left(\frac{w}{D}+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{2S}{D}+\frac{w^2}{D^2}+\frac{w}{D}+\frac{1}{4};$$

$$16^{tens}, n=\frac{1}{2}+\frac{w}{D}-\sqrt{\left(\left(\frac{w}{D}+1\right)\frac{w}{D}+\frac{1}{4}-\frac{2S}{D}\right)};$$

Aus Vergleichung von 5^{tens} und 6^{tens} ist

$$\frac{w-a}{D}+1=\frac{2S}{a+w}; \text{ daher}$$

$$(w+a)(w-a)+(w+a)D=2DS$$

$$S=\frac{(w+a)(w-a)}{2D}+\frac{w+a}{2};$$

$$17^{tens}, S=\left(\frac{w-a}{D}+1\right)\frac{w+a}{2};$$

$$(w+a)(w-a)=(2S-(w+a))D$$

$$18^{tens}, D=\frac{(w+a)(w-a)}{2S-(w+a)};$$

$$w^2-a^2=2DS-Dw-aD;$$

$$w^2+Dw+\left(\frac{D}{2}\right)^2=2DS+a^3-aD+\frac{D^2}{4}$$

$$19^{tens}, w=\sqrt{\left(a^2+D(2S-a+\frac{D}{4})\right)}-\frac{D}{2};$$

$$a^2-Da+\left(\frac{D}{2}\right)^2=w^2+Dw+\frac{D^2}{4}\cdot 2DS;$$

$$20^{tens}, a=\frac{D}{2}+\sqrt{(w^2+D(w+\frac{D}{4}-2S))};$$

Dritter Abschnitt.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 160.

Lehrsatz:

Aus der Formel einer geometrischen Reihe (§. 157, Zus. 3) geht hervor:

1tens, das allgemeine Gesetz einer geometrischen Reihe ist »jedes Glied ist dem ersten Gliede a mal einer Potenz des Exponenten (Quotienten) q von dem sovielten Grade, als Glieder vorangehen, gleich.«

Zusatz:

Das letzte Glied w einer geom. Reihe von n Gliedern ist daher $= aq^{n-1}$;

2tens, Die Summe aller Vorderglieder einer geometr. Progression verhält sich (nach 9ten Lehrs. des §. 144) zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied, d. i. wenn S die Summe aller Glieder ausdrückt, so ist

$$(S-w) : (S-a) = a : aq, \text{ folglich}$$
$$(S-w) : (S-a) = 1 : q,$$
$$qS-qw = S-a;$$
$$S = \frac{qw-a}{q-1};$$

Zusatz:

Aus dieser und der, im vorigen Zusatz erhaltenen Gleichung, lassen sich, wenn von deinen fünf Größen a, w, q, n und S drey bekannt sind, die übrigen drey durch Rechnung finden, und will man sie zur Auffindung einer, bei einer geom. fallenden Reihe unbekannten Größe anwenden, so hat man entweder w für das erste und a für das letzte Glied zu nehmen, oder q muß als ein ächter Bruch gegeben seyn.

3tens, Jede geometrische Progression läßt sich in eine dergleichen verwandeln, deren erstes Glied = 1, und deren

Exponent derselbe ist, wenn man alle Glieder durch das erste Glied dividirt; und es sind bei einer dergl. Reihe, alle Glieder Potenzen vom zweyten Gliede, denn z. B.

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=a(1+q+q^2+q^3+\ldots)$$
$$=a(q^0+q^1+q^2+q^3+\ldots)$$

§. 161.

Aufgabe:

Es sollen die Formeln angegeben werden, wodaus man jede unbekannte Größe einer geomet. Reihe, durch drey davon bekannte, finden kann.

Auflösung:

Nach vorigem §. ist

1^{tens}, $w = aq^{n-1}$;

2^{tens}, $S = \frac{qw-a}{q-1}$; daher aus 1^{tens},

3^{tens}, $a = \frac{w}{q^{n-1}}$;

4^{tens}, $q = \sqrt[n-1]{\frac{w}{a}}$;

5^{tens}, $q^n = \frac{wq}{a}$; dann aus 2^{tens},

6^{tens}, $a = qw-(q-1)S = S-(S-w)q$;

7^{tens}, $w = \frac{a+(2-1)S}{q} = S - \frac{S-a}{q}$;

8^{tens}, $q = \frac{S-a}{S-w}$;

Aus Vergleichung von 1^{tens} und 7^{tens} ist

$aq^{n-1} = \frac{a+(q-1)S}{q}$; daher

$aq^n = a+(q-1)S$;

$a(q^n-1) = (q-1)S$;

9^{tens}, $a = \frac{(q-1)S}{q^n-1}$;

10^{tens}, $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$;

11^{tens}, $q^n - \frac{S}{a} q + \frac{S - a}{a} = 0$;

12^{tens}, $q^n = \frac{a + (q-1)S}{a} = 1 + \frac{(q-1)S}{a}$;

Aus Vergleichung von 3^{tens} und 6^{tens} ist

$$\frac{w}{q^{n-1}} = qw - (q-1)S;$$

13^{tens}, $S = \frac{w(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$;

14^{tens}, $w = \frac{q^{n-1}(q-1)S}{q^n - 1}$;

$$wq^n - w = q^n S - q^{n-1} S;$$

$$(w - S) q^n + Sq^{n-1} - w = 0;$$

15^{tens}, $q^n - \frac{S}{S-w} q^{n-1} + \frac{w}{S-w} = 0$;

$$wqq^n - wq = qq^n S - q^n S;$$

16^{tens}, $q^n = \frac{wq}{wq - (q-1)S} = \frac{w}{\frac{S}{2} + w - S}$;

Aus Vergleichung von 4^{tens} und 8^{tens} ist

$$\sqrt[n-1]{\frac{w}{a}} = \frac{S-a}{S-w};$$

$$w = \frac{a(S-a)^{n-1}}{(S-w)^{n-1}};$$

17^{tens}, $w(S-w)^{n-1} - a(S-a)^{n-1} = 0$;

18^{tens}, $a(S-a)^{n-1} - w(S-w)^{n-1} = 0$;

$$\sqrt[n-1]{\frac{w}{a}} S - w \quad \sqrt[n-1]{\frac{w}{a}} = S - a;$$

19tens, $$S = \frac{w\sqrt[n-1]{\frac{w}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{w}{a}} - 1}$$

20tens, $$\left(\frac{S-a}{S-w}\right)^{n-1} = \frac{w}{a};$$

Zusaetze:

1tens, Die 11te, 15te, 17te und 18te Gleichung sind gemischte höhere, und werden deren Wurzeln nach der, in der höheren Arithmetik gegeben werdenden Lehre gefunden; und aus der 5ten, 12ten, 16ten und 20ten Gleichung wird n durch die Lehre der Logarithmen nach §. 182 bestimmt.

2tens, Bei einer abnehmenden unendlichen Progression ist das letzte Glied $w=0$ (Null) zu achten; und

3tens, man kann daher jede abnehmende unendliche Progression, indem man das letzte Glied $=0$ setzet, als eine endliche oder begränzte annehmen, und man nennt die Summe derselben, die **Gränze** der Summe der unendlichen Progression.

§. 162.

Lehrsaetze:

1tens, In jeder geom. Reihe ist das Produkt jeder zwey, von dem ersten und letzten Gliede gleich weit abstehenden Glieder, dem Produkte des ersten und letzten Gliedes gleich, daher ist bei einer dergleichen Reihe von gerader Gliederanzahl n, d. i. von $\frac{n}{2}$, dem Produkte des ersten und letzten Gliedes gleichen Factoren, das Produkt aller Glieder, d. i.

$$P = (a^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = a^n \, q^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

2tens, Das mittlere Glied m einer geom. Reihe von ungera-

der Glieder-Anzahl n ist $\sqrt{(a^2 q^{n-1})} = (a^2 q^{n-1})^{\frac{1}{2}}$, daher, da das Produkt der übrigen $\frac{n-1}{2}$ Paar Glieder nach 1^tens $(a^2 q^{n-1})^{\frac{n-1}{2}}$ ist, so ist das Produkt aller Glieder,

$$P = (a^2 q^{n-1})^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a^2 q^{n-1})^{\frac{1}{2}} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

Zusaetze:

1^tens. Aus 1^tens und 2^tens folgt, daß das Produkt aller Glieder einer geom. Reihe

$$P = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ist, welches sich auch daraus ergiebt, weil

$$P = a^n q^{0+1+2+3+\ldots+(n-1)}$$

und die Reihe $0+1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ ist; nach 1ten Zus. des §. 158).

2^tens. Aus dieser und den in vorigem §. gefundenen Gleichungen, läßt sich von den 6 Größen a, q, n, w, S und P einer geom. Reihe, eine jede derselben aus drey davon bekannten finden, und sind die, ausser den schon im §. 161 aufgeführten 20 Fällen, noch statt findenden 40 Fälle, folgende:

1^tens; $P = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$; (nach 1ten Zus.), daher

2^tens, $a = \frac{\sqrt[n]{P}}{q^{\frac{n-1}{2}}}$;

3^tens, $q = \sqrt[n-1]{\frac{\sqrt[n]{P^2}}{a^2}}$;

4^tens, $a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = P$;

Aus Vergleichung der 3ten Gleichung in §. 161, und dieser 2ten ist

$$\frac{W}{q^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{P}}{q^{\frac{n-1}{2}}};$$

8^{tens}, $W = q^{n-1}\sqrt[n]{P}$;

9^{tens}, $P = \frac{W^n}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$;

7^{tens}, $q = \sqrt[n-1]{\frac{W^2}{\sqrt[n]{P^2}}}$;

8^{tens}, $\frac{W^n}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}} = P$;

Aus Vergleichung der 4ten Gleichung in §. 161 und obiger 7ten, ist

$$\sqrt[n-1]{\frac{W}{a}} = \sqrt[n-1]{\frac{\sqrt[n]{P^2}}{a^2}};$$ daher:

$$\sqrt[n]{\frac{W}{a}} = \frac{\sqrt[n]{P}}{a};$$

$$\frac{W}{a} = \frac{\sqrt[n]{P^2}}{a^2};$$

9^{tens}, $W = \frac{\sqrt[n]{P^2}}{a}$;

10^{tens}, $a = \frac{\sqrt[n]{P^2}}{W}$;

11^{tens}, $P = (aw)^{\frac{n}{2}}$;

12^{tens}, $(aw)^n = P^2$;

Aus Vergleichung der 9ten Gleichung im §. 161 und obiger 2ten ist

$$\frac{(q-1)S}{q^n-1} = \frac{\sqrt[n]{P}}{q^{\frac{n-1}{2}}}; \text{ daher}$$

$$13^{\text{tens}}, S = \frac{(q^n-1)\sqrt[n]{P}}{q^{\frac{n-1}{2}}(q-1)};$$

$$14^{\text{tens}}, P = \left(\frac{q^{\frac{n-1}{2}}(q-1)S}{q^n-1}\right)^n;$$

$$15^{\text{tens}}, q^n\sqrt[n]{P} - P = q^{\frac{n-1}{2}}(q-1)S;$$

$$16^{\text{tens}}, q^n - \frac{S}{\sqrt[n]{P}}q^{\frac{n+1}{2}} + \frac{S}{\sqrt[n]{P}}q^{\frac{n-1}{2}} - 1 = 0;$$

In der 9ten Gleichung des §. 161 statt q seinen in obiger 3ten Gleichung gefundenen Werth substituirt, giebt

$$a = \frac{\sqrt[n-1]{\frac{\sqrt[n]{P^2}}{a^2} - 1}}{\sqrt[n-1]{\frac{P^2}{a^{2n}} - 1}} S; \text{ daher}$$

$$17^{\text{tens}}, S = \frac{\sqrt[n-1]{P^2} - \sqrt[n-1]{a^{2n}}}{a\sqrt[n-1]{\sqrt[n]{P^2}} - \sqrt[n-1]{a^{n+1}}} s.$$

woraus sich für a, n und P die 18te, 19te und 20te Gleichung, welche höhere gemischte sind, berechnen lassen.

In der 14ten Gleichung des §. 161 statt a seinen in obiger 7ten Gleichung gefundenen Werth gesetzt, giebt:

$$w\sqrt[n-1]{\frac{w^{2n}}{P^2}} - w = \frac{w^2}{\sqrt[n]{P^2}}\left\{\frac{\sqrt[n-1]{w^2}}{\sqrt[n-1]{\sqrt[n]{P^2}}} - 1\right\} S;$$

daher

$$21^{\text{tens}}, S = \sqrt[n-1]{\frac{w^{3n-1} - w}{\sqrt[n-1]{w^{2n} - w^2}} \cdot \frac{\sqrt[n-1]{P^2}}{\sqrt[n-1]{\sqrt[n]{P^2}}}};$$

woraus sich für w, n und P, die 22te, 23te und 24te Gleichung, welche höhere gemischte sind, berechnen lassen.

Aus der 4ten, 8ten, 12ten und 15ten Gleichung wird n durch die Lehre der Logarithmen nach §. 182 berechnet, und indem man dessen Werth seinem, aus den im §. 161 gefundenen Werth gleich setzt, erhält man daraus für die Größen a, q, w, P, dann für a, q, S, P, dann für w, q, S, P, und für a, w, S, P die Gleichungen für die übrigen 16 Fälle.

§. 163.

Einige Beispiele zur Uebung.

1tens, Nach dem Berichte des arabischen Geschichtschreibers Asephad wollte Scheram, König in Indien, daß der Erfinder des Schachspiels, Seßa Eba Dahor, sich selbst eine Belohnung wählen möchte. Er erbot sich nun, ihm folgende Summe Waizen zu reichen, als für das 1te Feld 1 Körnchen, für das 2te 2, für das dritte 4, und so für jedes folgende Feld, immer 2mal so viel Waizenkörner, als für das vorhergehende. Wie groß ist nun die Anzahl aller für die 64 Felder des Schachbrettes geforderten Waizenkörner?

Hier ist also $a=1$, $n=64$, $q=2$, und S wird gesucht; nun ist nach der 10ten Gleichung des §. 161

$$S = \frac{a(q^n - 1}{q-1}; \text{ daher}$$

$$S = \frac{1.2^{64} - 1}{2-1} = 2^{64} - 1; \text{ aber}$$

$2^{64} = (2^4)^4)^4)$ und $2^4 = 16$; $16^4 = 65536$ und

$2^{64} = 65536^4 = 18'''446{,}744''073'709'551{,}616$;
also $S = 18'''446{,}744''073{,}709'551{,}615$.

Anmerkung.

Nimmt man nun an, daß ungefähr 2760 Körner von mittlerem Waizen nach bayerl. Gewichte 4 Loth, der bayerl. Metzen aber 49 Pfund 15 1/2 Loth wiegt, so beträgt die gebetene Summe $2''313{,}352'495{,}118$ bayerl. Scheffel; man würde daher mehr als 7709 Jahre zur Abgabe dieser Summe brauchen, wenn man täglich eine Million Scheffel hergeben würde; aufgeschüttet würde diese Summe einen größern Raum als 6 Cubikmeilen einnehmen, und nach einer mäßigen Berechnung erst in mehr als 70 Jahren gewonnen werden können, wenn man auch alles feste Land mit Waizen bebaute.

2tens, Es soll die Summe der abnehmenden Reihe

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^4}{b^4} + \cdots$$

angegeben werden.

Hier ist das erste Glied $a = \frac{a}{b}$, der Exponent $q = \frac{a}{b}$, und das letzte Glied (nach 2ten Zus. des §. 161) $= 0$ gegeben, und S wird gesucht; nun ist nach der 2ten Gleichung des §. 161

$$S = \frac{qw - a}{q - 1}, \text{ daher}$$

$$S = -\frac{a}{b} : \left(\frac{a}{b} - 1\right) = -\frac{a}{b} : \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b-a}.$$

Anmerkung.

Dividirt man diesen Zähler durch seinen Nenner, so erhält man die gegebene Reihe wieder.

3tens, Es soll ein periodischer Dezimalbruch z. B. $0{,}032857142857142\cdots$ in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Auflösung:

Man zerlege den periodischen Dezimalbruch so in seine Summanden, daß der Zähler des ersten Summanden jene

Zahl wird, welche durch die, vor der Periode stehenden Ziffern entstehet, und jeder Zähler der folgenden Summanden die, durch die Periode entstehende Zahl ist, so bilden diese folgenden Brüche eine abnehmende unendliche Reihe, deren Summe nebst dem ersten Summanden den verlangten gemeinen Bruch giebt; d. i. bei obigem Beispiel setze man

$$0{,}032857142857\ldots = \frac{3}{100} + \frac{285714}{100000000} + \frac{285714}{100000000000000} + \ldots$$

Es ist also bei der durch die Periode entstehenden Reihe, $a = 0{,}00285714$; $q = 0{,}000001$; $w = 0$; und S wird gesucht; nun ist nach der zweyten Gleichung des §. 161

$$S = \frac{qw - a}{q - 1}, \text{ daher}$$

$$S = \frac{-0{,}00285714}{-0{,}999999} = \frac{285714}{99999900};$$

$$\text{also } 0{,}032857142857\ldots = \frac{3}{100} + \frac{285714}{99999900};$$

$$= \frac{3285711}{99999900} = \frac{23}{700}; \text{ (vergleiche 3ten Zus. des §. 70).}$$

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Progressionslehre auf die Interusurienrechnung.

§. 164.

Aufgabe:

Es soll angegeben werden, wie hoch Kapital K durch Zinseszinsen zu P Prozente in N Jahren anwächst.

Auflösung:

Nach dem ersten Jahre ist das Kapital K sammt den Zinsen (nach §. 149) $= \frac{100+P}{100} K$, folglich wird das Ka-

pital durch die einjährigen Zinsen um $\frac{100+P}{100}$ mal größer; da nun die Zinsen immer stehen bleiben, und wie das Kapital verzinset werden, so muß auch das Kapital sammt den Zinsen des ersten Jahres, im zweyten Jahre um $\frac{100+P}{100}$ mal größer werden und dieß so fort; demnach ist S oder das Kapital K nach N Jahren, derjenigen Zahl gleich, die man erhält, wenn man K nach und nach N mal mit $\frac{100+P}{100}$ multiplicirt, d. i. es ist dem letzten Gliede einer geom. Progression gleich, deren erstes Glied K, deren Exponent $\frac{100+P}{100}$ und deren Glieder-Anzahl N+1 ist. Nun ist nach der 1ten Gleichung des §. 161

$$w = aq^{n-1}, \text{ daher}$$

$$S = K.\left(\frac{100+P}{100}\right)^{N+1-1}, \text{ d. i.}$$

$$S = \left(\frac{100+P}{100}\right)^{N} K.$$

Zusatz:

Von den vier Größen K, P, N und S läßt sich daher, aus drey davon bekannten, die vierte unbekannte bestimmen, und es ist

$$1^{\text{tens}},\ S = \left(\frac{100+P}{100}\right)^{N} K;$$

$$2^{\text{tens}}\ K = \left(\frac{100}{100+P}\right)^{N} S;$$

$$3^{\text{tens}},\ P = 100\sqrt[N]{\frac{S}{K}} - 100;$$

$$4^{\text{tens}},\ \left(\frac{100}{100+P}\right)^{N} = \frac{K}{S};$$

wobei man aus der letzten Gleichung N durch die Lehre der Logarithmen nach dem 3ten Beispiel in §. 182 findet.

§. 165.

Aufgabe:

Es soll angegeben werden, wie hoch sich nach N Jahren, ein Kapital K durch Zinseszinsen zu P Prozent und durch einen Zuschuß k am Ende jeden Jahres, d. i. wie hoch sich S, beläuft.

Auflösung:

Ohne den Zuschuß ist nach vorigem §. 1^tens,

$S=\left(\frac{100+P}{100}\right)^N K$; der Zuschuß k, der nach dem ersten Jahre dazu kommt, ist nach dem zweyten Jahre $=\frac{100+P}{100}k$ (ebenfalls nach vorigem §.) geworden, und kommt zu demselben abermals k, daher er $=k+\frac{100+P}{100}k$, d. i. $=$ der Summe einer geom. Progression ist, deren erstes Glied $=k$, deren Exponent $=\frac{100+P}{100}$, und deren Glieder Anzahl $=$ der Anzahl der Jahre der Auslehnung des Kapitals K ist; es ist also $S=\left(\frac{100+P}{100}\right)^N K +$ der Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied k, deren Exponent $\frac{100+P}{100}$, und deren Glieder Anzahl N ist; d. i. (nach der 10ten Gleichung des §. 161).

$$S=\left(\frac{100+P}{100}\right)^N K+\frac{k\left(\left(\frac{100+P}{100}\right)^N-1\right)}{\frac{100+P}{100}-1}, \text{ also}$$

$$S=\left(\frac{100+P}{100}\right)^N K+\frac{100k\left(\frac{100+P}{100}\right)^N-100\,k}{100+P-100}$$

$$S = \left(\frac{100+P}{100}\right)^N K + \frac{100k\left(\frac{100+P}{100}\right)^N - 100k}{P};$$

$$S = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N KP}{P} + \frac{100k\left(\frac{100+P}{100}\right)^N - 100k}{P};$$

$$S = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N (KP+100k) - 100k}{P};$$

Zusaetze:

1tens, Von den fünf Größen K, P, N, S und k läßt sich daher, aus vier davon bekannten, die fünfte unbekannte Größe bestimmen, es ist nemlich:

1tens, $S = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N (KP+100k) - 100k}{P}$; daher

2tens, $K = \frac{PS - \left(\frac{100+P}{100}\right)^N .100k + 100k}{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N P}$;

3tens, $k = \frac{PS - \left(\frac{100+P}{100}\right)^N KP}{100\left(\frac{100+P}{100}\right)^N - 100}$;

4tens, N wird hieraus durch die Logarithmen nach dem 3ten Beispiel in §. 182 berechnet.

5tens, Um P hieraus zu bestimmen, erhält man aber keine bequemere Formel und muß es daher aus denen ersten durch Versuche finden.

2tens, Wenn man anstatt das Kapital K jährlich um k zu vermehren, solches jährlich um k vermindert, so ist, um den Rest R nach N Jahren zu bestimmen, die in vori-

ger Auflösung addirte Progressions-Summe abzuziehen, daher

$$R = \left(\frac{100+P}{100}\right)^N K - \frac{k\left(\left(\frac{100+P}{100}\right)^N - 1\right)}{\frac{100+P}{100} - 1};$$ also

$$1^{tens},\ R = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N (KP - 100k) + 100k}{P};$$

$$2^{tens},\ K = \frac{PR + \left(\frac{100+P}{100}\right)^N \cdot 100k - 100k}{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N P};$$

$$3^{tens},\ k = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N KP - PR}{100\left(\frac{100+P}{100}\right)^N - 100};$$

4^{tens}, N und P wird wie im vorigen Zusatz hieraus nach dem 3ten Beispiel in §. 182 bestimmt.

3^{tens}, Vermehrt man das Kapital K jährlich um k, vermindert aber solches auch jährlich um r; so darf man, um S oder R zu bestimmen, in den Formeln des 1ten Zus. statt k nur immer k—r, oder in denen des 2ten Zus. statt k nur immer r—k setzen.

4^{tens}, Der 1te Zus. des §. 149 gilt auch hier.

VII.

Von den Logarithmen.

Erster Abschnitt.

Von den Logarithmen im Allgemeinen.

§. 166.

Erklärungen:

1tens, Wenn man eine geometrische Reihe, deren erstes Glied = 1 ist (nach 3ten Lehrs. des §. 160), betrachtet, so ersieht man, daß der Exponent jedes Gliedes angiebt, aus wie vielen stetigen Verhältnissen das Verhältniß von 1 zu diesem Gliede zusammengesetzt ist, z. B. bei der Reihe q^0, q^1, q^2, q^3 u. s. w. giebt der Exponent 3 des vierten Gliedes an, daß $1 : q^3$ aus den 3 Verhältnissen $q^0 : q^1$, $q^1 : q^2$, und $q^2 : q^3$ zusammengesetzt ist; man nennt daher den Exponenten eines jeden Gliedes einer solchen Reihe, seinen Logarithmus (αριθμος λογων, die Zahl der Verhältnisse).

2tens, Die Glieder einer unter 1tens angeführten Reihe sind Potenzen von ein und derselben Zahl, man nennt daher auch, insoferne man eine jede Zahl a als Potenz ein und derselben Zahl b, die nicht 1 ist, (weil sonst die Zahl a immer selbst 1 seyn müßte) betrachtet, den ihr dann zukommenden Exponenten den Logarithmus der Zahl a, und die Zahl b die Grundzahl oder Basis des sich hiernach für jede Zahl ergebenden Logarithmus, oder des sich durch diese Logarithmen ergebenden logarithmischen Systems.

3tens, Den Logarithmus einer Zahl a bezeichnet man, indem man log: oder l. vorsetzet, d. i. z. B. wenn $a = b^x$, so ist $x = \log; a = l.a$.

Zusaetze:

1tens, Der Bäsis b kann man jeden Werth, den von 1 ausgenommen, geben; daher es auch unendlich viele logarithmische Systeme geben kann.

2tens, In jedem Systeme ist der Logarithmus von 1, d. i. log:1 = 0, denn es ist jederzeit $1 = b^0$, welchen Werth auch b haben mag.

3tens, In jedem Systeme haben gleiche Zahlen auch immer gleiche Logarithmen, und gleiche Logarithmen gehören zu gleichen Zahlen, denn ist a = d, und $a^x = d^y$, so ist auch $a^x = d^x$, daher $d^x = d^y$ und x = y; und umgekehrt: ist x = y und die Basis a = d, so ist auch $a^x = d^y$.

§. 167.

Lehrsaetze:

1tens, Den Logarithmus eines Produktes erhält man, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt, d. i. log:(mn) = l.m + l.n; denn ist für die Basis b

$m = b^x$ und $n = b^y$, so ist

$mn = b^{x+y}$, folglich

$\log:(mn) = x + y = l.m + l.n$;

Zusatz:

Man erhält daher die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch bloße Addition der Logarithmen von Primzahlen.

2tens, Den Logarithmus eines Quotienten oder Bruches erhält man, wenn man den Logarithmus des Divisors oder Nenners, von dem Logarithmus des Dividenden oder Zählers abzieht, d. i. $\log:\frac{m}{n} = l.m - l.n$, denn ist für die Basis b

$m = b^x$ und $n = b^y$, so ist

$$\frac{m}{n} = b^{x-y};$$ daher

$$1.\frac{m}{n} = x-y = 1.m-1.n;$$

3tens, Den Logarithmus einer Potenz erhält man, wenn man den Logarithmus ihrer Grundzahl mit ihrem Exponenten multiplicirt, d. i. $\log: m^n = n.1.m$; denn ist für die Basis b

$m = b^x$, so ist $m^n = b^{nx}$,

daher $1.m^n = nx = n \log: m$.

4tens, Den Logarithmus einer Wurzel erhält man, wenn man den Logarithmus von den, dem Wurzelzeichen nachfolgenden Größen, durch den Wurzelexponenten dividirt,

d. i. $\log: \sqrt[n]{m} = \frac{1.m}{n}$; denn ist für die Basis b

$m = b^x$, so ist $\sqrt[n]{m} = b^{\frac{x}{n}}$, folglich

$$\log. \sqrt[n]{m} = \frac{x}{n} = \frac{\log. m}{n};$$

§. 168.

Lehrsatz:

Der Logarithmus der, von zwey gegebenen Zahlen mittleren geom. Proportionalzahl, ist der mittleren arithm. Proportionalzahl von den Logarithmen dieser beyden gegebenen Zahlen gleich, d. i. wenn A:C:B, so ist $1.C = \frac{1.A+1.B}{2}$,

denn, wenn A:C:B, so ist $c = \sqrt{(AB)}$, und nach 4tens des §. 167 ist $\log: c = \frac{\log: (AB)}{2} = \frac{1.A+1.B}{2}$ (nach 1tens des §. 167).

Zusatze:

1tens, Man erhält also den Logarithmus einer zwischen die Glieder der Reihe

$$b^0, b^1, b^2, b^3, \text{ u. s. w.}$$

fallenden gegebenen Primzahl, wenn man so lange fort die mittlere geom. Proportionalzahl zwischen diesen Gliedern sucht, bis man dadurch eine der gegebenen Primzahl gleiche, oder ihr doch gleich geachtet werden könnende Zahl erhält, und deren Logarithmus nach obigen Lehrsatz bestimmt.

2tens, Aus den nach 1tens gefundenen Logarithmen der Primzahlen, erhält man, nach Zus. des 1ten Lehrsatzes in §. 167, die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen, daher die Logarithmen aller ganzen Zahlen, und aus diesen, nach den 2ten, 3ten und 4ten Lehrsatz des §. 167, die Logarithmen der Brüche, Potenzen und Wurzeln.

Zweyter Abschnitt.

Von den briggischen und natürlichen Logarithmen.

§. 166.

Erklärungen:

1tens, Dasjenige logarithmische System, dessen Basis $b=10$ ist, heißt das gemeine oder briggische, nach dem Professor Heinrich Brigg zu Oxford also benannt, weil solcher die Logarithmen für die Basis 10 für alle ganze Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 auf Gutheißen des Schottländers Joh. Neper von Merchiston berechnete, welcher im Jahre 1614 zuerst ein Logarithmensystem lieferte.

Anmerkung.

Unter den neuern Ausgaben ist dem Anfänger vorzüglich das logarithmisch-trigonometrische Handbuch von Vega, 3te Auflage, Leipzig 1811. zu empfehlen, welchem auch der Gebrauch seiner Tabellen vorgesetzt ist.

2tens, Wenn man den Logarithmus einer Zahl $1+x$, durch Auflösung der Funktionen in Reihen darstellet, so erhält man, wie solches in der Lehre derselben gezeigt wird, eine Reihe, deren Glieder alle mit einerlei Coefficienten multiplicirt sind, und da es nun am natürlichsten ist, diesen Coefficienten, welchen man den logarithmischen Modul nennt, = 1 zu setzen, so nennt man dasjenige System, dessen Modul = 1 ist, das natürliche oder hyperbolische. Letzteres, weil bei einer in der höheren Geometrie vorkommenden krummen Linie, die Hyperbel genannt wird, eine Fläche die Größe des natürlichen Logarithmus einer derselben entsprechenden Linie angiebt. Alle übrigen, so wie auch die briggischen Logarithmen, nennt man daher künstliche, und bezeichnet zu diesem Unterschiede die gemeinen durch log. vulg. oder blos durch log:, die natürlichen aber durch log. nat. oder log:hyp., so wie die künstlichen überhaupt durch log:art:;

Zusatze:

1tens, Wenn man den natürlichen Logarithmus einer Zahl mit dem Modul A eines künstlichen Systems multiplicirt, so erhält man den Logarithmus, der dieser Zahl in solchem künstlichen Systeme zukommt; d. i. log:art: x = A × log:nat: x; und

2tens, Den natürlichen Logarithmus einer Zahl erhält man, wenn man den Logarithmus, welcher dieser Zahl in einem künstlichen Systeme zukommt, durch den Modul A dieses künstlichen Systems dividirt; denn nach 1tens ist

$$\log.art:x = A.\log.nat.x, \text{ daher } \frac{\log.art.x}{A} = \log.nat.x$$

3tens, Aus der, unter übiger 2ten Erkl. angeführten Reihe berechnet sich der log. nat. 10 = 2,3025850..;

§. 170.

Zusaetze:

1tens, Für die Basis b=10 entsprechen also die

Logarithmen	0,	1,	2,	3,	4,	u. s. w.
den Zahlen	10^0,	10^1,	10^2,	10^3,	10^4	u. s. w.
d.i. den Zahlen	1,	10,	100,	1000,	10000	u. s. w.

2tens, Im briggischen Systeme sind daher die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche keine Potenzen von 10 sind, Brüche, und zwar von denjenigen zwischen 1 und 10, ächte, und von den übrigen, unächte Brüche.

3tens, Im briggischen Systeme entspricht einer größern Zahl auch ein größerer Logarithmus.

§. 171.

Erklärung:

Jeden briggischen Logarithmus drückt man gewöhnlich durch einen Dezimalbruch mit 7 Dezimalstellen aus, und nennt diejenige Ziffer, welche die Ganzen ausdrückt, das Kennziffer oder die Charakteristik, und die Dezimalziffern die Mantisse.

Zusaetze:

1tens, Im briggischen Systeme haben die Logarithmen derjenigen Zahlen, die zwischen zwey auf einander folgende Potenzen von 10, z. B. zwischen 10^n und 10^{n+1} fallen, einerlei Kennziffer mit der kleinern derselben, also hier mit 10^n;

2tens, Im briggischen Systeme haben die Logarithmen derjenigen Zahlen, wovon die eine das 10fache, 100fache, 1000fache, u. s. w. der andern ist, einerlei Mantisse, denn $\log:(10^n x) = n + \log. x$, und da n eine ganze Zahl ist, so bleibt die Mantisse für $\log:(10^n x)$ und log. x dieselbe.

3tens, Im briggischen Systeme ist bei dem Logarithmus jeder

ganzen Zahl, dessen Kennziffer um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern, aus der diese ganze Zahl besteht; z. B. für eine Zahl von 4 Ziffern, ist 3 die Charakteristik ihres Logarithmus.

§. 172.

Aufgabe:

Den briggischen Logarithmus für die Zahl 5 bis auf sieben Dezimalstellen zu berechnen.

Auflösung:

1^tens, Da 5 zwischen 1 und 10 fällt, von denen man die Logarithmen = 0 und = 1 weiß, so suche man nach 1ten Zus. des §. 168 die mittlere geom. Proportionalzahl C und deren Logarithmus; d. i. $C = \sqrt{10} = 3{,}162277$,

daher $\log. c = \log: 3{,}162277 = \frac{0+1}{2} = 0$;

2^tens, es liegt nun 5 zwischen 3,162277 und 10, von denen man die Logarithmen weiß, man suche daher deren mittlere geom. Proportionalzahl D, welche = 5,623413 und

der $\log. D = \log. 5{,}623413 = \frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$ sich ergiebt;

3^tens, setze dieses Verfahren fort, bis man 5 oder eine ihr sehr nahe kommende Zahl, als mittlere geom. Proportionalzahl zweyer Zahlen erhält, von denen man die Logarithmen bereits gefunden hat, und bestimme hieraus ihren Logarithmus; welches geschieht, wenn man dieses Verfahren noch 20mal beobachtet, wodurch man dann $\log. 5{,}000000_{**} = 0{,}6989700_{**}$ findet.

Zusaetze:

1^tens, Auf ähnliche Art werden die Logarithmen der Primzahlen für das briggische System wirklich berechnet und aus solchen die der übrigen Zahlen gemäß 2ten Zus. des §. 168 gefunden.

2^tens, Durch die Logarithmen der Zahlen 10 und 5 ist auch

der Logarithmus von 2 gegeben, denn nach 2ten Lehrs. des §. 167 ist $l.10 - l.5 = l.\frac{10}{5} = l.2$.

3tens, Den Logarithmus eines ächten Bruches erhält man, wenn man vom Logarithmus des Nenners jenen des Zählers abzieht, und dem Reste das Zeichen (—) vorsetzet, denn $\log\frac{m}{n} = l.m. - l.n = -l.n + l.m = -(l.n - l.m) = -l.\frac{n}{m}$, und es haben daher zwey Brüche, wovon der eine der umgekehrte des andern ist, gleiche, jedoch entgegengesetzte Logarithmen.

4tens, Um den Logarithmus einer gemischten Zahl zu bestimmen, verwandle man solche in einen unächten Bruch, und bestimme dessen Logarithmus nach 2tens des §. 167.

5tens, Den Logarithmus eines Dezimalbruches erhält man, wenn man den Logarithmus von ihm, denselben als ganze Zahl betrachtet, bestimmt, und davon so viele Einheiten abzieht, als der Dezimalbruch Dezimalen hat, (nach §. 65 und nach 3tens des §. 167); z. B. log. 0,037 = l.37 — 3;

6tens, Ganze und gemischte Zahlen haben daher positive, hingegen ächte Brüche haben negative Logarithmen; ebenso umgekehrt gehören zu positiven Logarithmen ganze oder gemischte Zahlen, und zu negativen Logarithmen ächte Brüche.

7tens, Die Differenzen der Logarithmen nehmen, je größer die Zahlen werden, immer mehr ab, so daß der log. 10000000 und log. 10000001, wenn solche nur bis auf 7 Dezimalstellen bestimmt worden, bereits gleich sind. Es lassen sich daher auch nach dergleichen Tabellen die den Logarithmen entsprechenden Zahlen blos bis auf 7 Ziffern verläßlich finden.

§. 173.

Aufgabe:

Den Modul A für das briggische Logarithmensystem zu berechnen.

Auflösung:

Nach 1ten Zus. des §. 169 ist:

log. vulg. 10 = A. log. nat. 10; d. i.

1 = A. 2,3025850; (nach 3ten Zus. des §. 169).

$$A = \frac{1}{2{,}3025850} = 0{,}4342945.$$

Zusaetze:

1tens, Multiplicirt man den natürlichen Logarithmus einer Zahl mit 0,4342945, so erhält man den briggischen Logarithmus dieser Zahl, und

2tens, dividirt man den briggischen Logarithmus einer Zahl durch $0{,}4342945 = \frac{1}{2{,}3025850}$, oder was einerlei, multiplicirt man denselben mit 2,3025850., so erhält man den natürlichen Logarithmus dieser Zahl.

Anmerkung.

Zur leichtern gegenseitigen Verwandlung sind daher in vielen logarithmischen Tabellen die Produkte (Multipla) von 0,4342945 und von 2,3025850, mit denen Ziffern 1 bis 9 beigesetzt.

Dritter Abschnitt.

Von Anwendung der Logarithmen auf die Zifferrechnung.

§. 174.

Aufgabe:

Zahlen zu multipliciren, z. B. 373 × 187.

Auflosung:

Man addire die Logarithmen der gegebenen Factoren,

so ist (nach §. 167, $1^{tens}_{\sim}$) die, ihrer Summe entsprechende Zahl, das verlangte Produkt; d. i.

l. 373 = 2,5717088
l. 187 = 2,2718416
Summe = 4,8435504

daher, weil 4,8435504 = l. 69751, ist auch

373 × 187 = 69751.

§. 175.

Aufgabe:

Zahlen zu dividiren, z. B. 69,751:373.

Auflosung:

Man subtrahire den Logarithmus des Divisors von dem des Dividends, so ist (nach §. 167, $2^{tens}_{\sim}$) die, dem Reste zugehörige Zahl, der verlangte Quotient;

d. i. log. 69751 = 4,8435504
log. 373 = 2,5717088
Rest = 2,2718416

daher, weil 2,2718416 = l. 187 ist, ist auch 69751 : 373 = 187.

§. 176.

Aufgabe:

Einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Auflosung:

$1^{tens}_{\sim}$, Man addire der Charakteristik des Logarithmus vom Zähler, so viele Einheiten, um den Logarithmus des Nenners davon abziehen zu können;

$2^{tens}_{\sim}$, bestimme, nachdem man dieses wirklich verrichtet hat, die dem Reste entsprechende Zahl, und dividire solchen durch 1 mit soviel angehängten Nullen, als man den Logarithmus des Zählers Einheiten addirt hat; d. i.

log: 7 = 1,8450980 — 1
log 8 = 0,9030900
log: $\frac{7}{8}$ = 0,9420080 — 1

daher, da $0{,}9420080 = \text{l.}8{,}75$ und also (nach 2^tens^ des §. 167) $0{,}9420080 - 1 = \text{l.}\frac{8{,}75}{10} = \text{l.}0{,}875$ (nach 3ten Zuf. des §. 68) ist, ist auch $\frac{7}{8} = 0{,}875$;

§. 177.

Aufgabe:

Zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden; z. B. $18 : 30 = 21 : x$;

Auflosesung:

Man addire die Logarithmen der beyden mittleren Glieder und ziehe von ihrer Summe den Logarithmus des ersten Gliedes ab, d. i.

$$\text{l.}\ 30 = 1{,}4771213$$
$$\text{l.}\ 21 = 1{,}3222193$$
$$\text{Compl. dec. l.}\ 18 = 8{,}7447275 - 10;\ (2^{\text{ten}}\ \text{Zuf. des §. 66.})$$
$$\text{l.}\ x = 11{,}5440681 - 10 = 1{,}5440681;$$

so ist (nach 1^tens^ des §. 145) die, dem Reste entsprechende Zahl, das gesuchte vierte Glied, also, da $1{,}5440681 = \text{l.}35$ ist, ist auch $x = 35$.

§. 178.

Aufgabe:

Die unbekannte Zahl x eines Beispiels der zusammengesetzten Proportionslehre zu finden; z. B. die des 2ten Beispiels in §. 156.

Auflosesung:

Man addire die Logarithmen der nach 1^tens^ und 2^tens^, des §. 145 in ganzen Zahlen erhaltenen mittleren Glieder und ziehe den Logarithmus der letzten Glieder davon ab, so ist die dem Reste entsprechende Zahl die verlangte x; d. i.

l. 4 = 0,6020600
l. 100 = 2,0000000
l. 450 = 2,6532125
l. 6 = 0,7781513
l. 4 = 0,6020600
l. 2 = 0,3010300
Compl. dec. l. 400 = 7,3979400 — 10;
" " l. 300 = 7,5228787 — 10;
" " l. 8 = 0,0969100 — 1;
" " l. 7 = 0,1549020 — 1

l. x = 22,1091445 — 22 = 0,1091445 = l. $\frac{9}{7}$

daher $x = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$;

Zusatz:

Zieht man bei, nach der Neperischen Regel angesetzten Beispielen, von der Summe der Logarithmen der rechts des Strichs stehenden Zahlen, die Summe der Logarithmen der links desselben stehenden Zahlen ab, so giebt die dem Reste entsprechende Zahl die gesuchte x.

§. 179.

Aufgabe:

Eine Zahl zu einer Potenz, z. B. 37 zum Cubus zu erheben.

Auflösung:

Man multiplicire den Logarithmus der Zahl mit der Zahl des Grades der verlangten Potenz, so ist die, dem Produkte entsprechende Zahl, die verlangte Potenz der gegebenen Zahl, (nach §. 167, 3tens); d. i.

3. log. 37 = 3. 1,5682017 = 4,7046051 = l. 50653,

also $37^3 = 50653$.

§. 180.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel, z. B. die 5te Wurzel aus 59,049 zu ziehen.

Auflösung:

Man dividire den Logarithmus der gegebenen Zahl durch die Zahl des Grades der verlangten Wurzel, so ist nach 4^tens^ des §. 167 die, dem Quotienten entsprechende Zahl, die verlangte Wurzel, d. i.

$$\frac{l.59049}{5} = \frac{4,7712125}{5} = 0,9542425 = \log. 9;$$

daher $\sqrt[5]{59049} = 9$.

Zusatz:

Hat man hiebei einen nach Zus. 5 des §. 172 erhaltenen Logarithmus zu dividiren, so drücke man denselben so aus, daß die abzuziehenden Einheiten durch den Divisor theilbar sind; z. B. ist $\sqrt{0,037}$ zu bestimmen, so setze man statt l.0,037 = 1,5682017—3, solchen = 0,5682017—2, wo dann

$$\log. \sqrt{0,037} = \frac{0,5682017-2}{2} = 0,2841008-1 = l.\frac{1,923538}{10}$$

= log. 0,1923538, daher $\sqrt{0,037} = 0,1923538$**;

§. 181.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl x zu suchen; z. B. 72 : x : 1152.

Auflösung:

Man dividire die Summe ihrer Logarithmen durch 2, so ist (nach 3^tens^ des §. 145) die, dem Quotienten entsprechende Zahl, die verlangte x; d. i.

$$\begin{array}{rl} l. & 72 = 1,8573325 \\ l. & 1152 = 3,0614525 \\ \hline l. & x = \frac{4,9187850}{2} = 2,4593925 = l. 288; \end{array}$$

daher

$$x = 288;$$

§. 182.

Aufgabe:

Eine Gleichung, worin die unbekannte Größe als Exponent vorkommt, aufzulösen.

Auflösung:

Man reducire die gegebene Gleichung so, daß diejenige Größe mit dem unbekannten Exponenten allein und positiv auf eine Seite zu stehen kommt, und setze nun die Logarithmen für die Größen einer jeden Seite, so sind auch diese (nach 3ten Zus. des §. 166) gleich, daher man nun nach den gewöhnlichen Reduktionsgesetzen die unbekannte Größe x finden kann, indem solche (nach 2tens, und 3tens des §. 167) jetzt nur noch als Factor oder Quotient erscheinet.

Beispiele.

1.

Die unbekannte Größe n aus der im §. 161 für geom. Progressionen entwickelten 5ten, 12ten, 16ten und 20ten Gleichung anzugeben.

1tens, Da $q^n = \frac{wq}{a}$, so ist

$$n.\log. q = lw + l.q - l.a;$$

$$n = 1 + \frac{lw - la}{l.q};$$

2tens, Da $q^n = 1 + \frac{(q-1)S}{a}$, so ist

$$n.l.q = l.\left(1 + \frac{(q-1)S}{a}\right);$$

$$n = \frac{l.\left(1 + \frac{(q-1)S}{a}\right)}{l.q};$$

3tens, Da $q^n = \frac{wq}{S-(S-w)q}$, so ist

$$n.l.q = l.w + l.q - l.(S-(S-w)q);$$

$$n = 1 + \frac{l.w - l(S-(S-w)q)}{l.q};$$

4tens, Da $\left(\frac{S-a}{S-w}\right)^{n-1} = \frac{w}{a}$, so ist

$$(n-1)(l.(S-a) - l(S-w)) = l.w - l.a;$$

$$n-1=\frac{l.w-la}{l.(S-a)-l(S-w)};$$

$$n=1+\frac{l.w-la}{l.(S-a)-l(S-w)};$$

2.

Aus denen, zur Auffindung der unbekannten Größe n zu dem 2ten Zuf. des §. 162 entwickelten 4ten, 8ten und 12ten Gleichungen, diese Größe n zu finden.

1tens, Da $a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = P$, so ist

$$n.la+\frac{n^2-n}{2}.lq=l.P;$$

$$n.2l.a+n^2\,lq-n.l.q=2.l.P;$$

$$n^2\,lq+n(2l.a-l.q)=2.l.P;$$

$$n^2+\left(\frac{2\,la}{l.q}-1\right)n+\left(\frac{la}{lq}-\tfrac{1}{2}\right)^2=\frac{2lP}{l.q}+\left(\frac{l.a}{l.q}-\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$n+\frac{l.a}{l.q}-\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{2lP}{l.q}+\left(\frac{la}{l.q}-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)};$$

$$n=\tfrac{1}{2}-\frac{l.a}{l.q}\pm\sqrt{\left(\frac{2lP}{l.q}+\left(\frac{l.a}{l.q}-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)};$$

2tens, Da $\frac{w^n}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}} = P$, so ist

$$n.l.w-\left(\frac{n^2-n}{2}\right)l.q=l.P;$$

$$n.2l.w-n^2l.q+nl.q=2\,l.P$$

$$n^2\,l.q-n(2lw+l.q)=-2l.P$$

$$n^2-\left(\frac{2lw}{l.q}+1\right)n+\left(\frac{lw}{l.q}+\tfrac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{lw}{lq}+\tfrac{1}{2}\right)^2-2\,l.\,P;$$

$$n-\left(\frac{l.w}{l.q}+\tfrac{1}{2}\right)=\pm\sqrt{\left(\left(\frac{lw}{lq}+\tfrac{1}{2}\right)^2-2\,l.P\right)};$$

$$n=\frac{l_w}{lq}+\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{lw}{lq}+\tfrac{1}{2}\right)^2-2\,l.P\right);}$$

3tens, Da $(aw)^n = P^2$, so ist

$$n\,(l.\,a+l.w) = 2l.P\,;$$

$$n = \frac{2l.P}{l.a+l.w}$$

3.

Aus der für die Interusurienrechnung in dem §. 164 und §. 165 zur Auffindung der unbekannten Größe N gegebenen Gleichungen, diese Größe N anzugeben.

1tens, Da nach Zus. des §. 164

$$\left(\frac{100}{100+P}\right)^N = \frac{K}{S}\text{, so ist}$$

$$N(l.100-l(100+P)) = l.K-l.S$$

$$N = \frac{l.S-l.K}{l.(100+P)-l.100}\,;$$

2tens, Da nach 1ten Zus. des §. 165

$$S = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N (KP+100k)-100k}{P}\text{; so ist}$$

$$\frac{PS+100k}{KP+100k} = \left(\frac{100+P}{100}\right)^N\,;$$

$$l.(PS+100k)-l.(KP+100k)+N(l.(100+P)-l.100)\,;$$

$$N = \frac{l.(PS+100k)-l.(KP+100k)}{l.(100+P)-l.100}\,;$$

3tens, Da nach 2ten Zus. des §. 165

$$R = \frac{\left(\frac{100+P}{100}\right)^N (KP-100k)+100k}{P}\text{; so ist}$$

$$\frac{PR-100k}{KP-100k} = \left(\frac{100+P}{100}\right)^N\,;$$

$$\frac{100k-PR}{100k-KP} = \left(\frac{100+P}{100}\right)^N\,;$$

$$l.(100k-PR)-l.(100k-KP) = N(l.(100+P)-l.100)\,;$$

$$N = \frac{l.(100k-PR)-l.(100k-KP)}{l.(100+P)-l.100}\,;$$

VIII.

Von den continuirlichen oder Kettenbrüchen.

Erster Abschnitt.

Von den continuirlichen Brüchen im Allgemeinen.

§. 183.

Von dem Nutzen derselben:

Die continuirlichen Brüche dienen vorzüglich dazu, einen ächten oder unächten Bruch, also auch ein Verhältniß, Näherungsweise in möglichst kleinsten Zahlen auszudrücken, auch werden sie mit entschiedenen Nutzen bei Ausziehung der Wurzeln, vorzüglich aus unvollkommenen Quadraten, dann bei Auflösung der Reihen in eine Summe, und der höheren gemischten Gleichungen mittelst Näherung, und endlich auf die unbestimmte Analytik, die Differential- und Integralrechnung.

Anmerkung.

Die hier vorgetragen werdende Lehre der continuirlichen Brüche geht nur so weit, als es die in diesem Bande vorgetragenen übrigen Lehren gestatten. Aus dem ziemlich vollständigen Werkchen »Lehre von den continuirlichen Brüchen nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen auf Arithmetik und Algebra, vollständig abgehandelt von C. J. Kausler. Stuttgart 1805.« kann das Ausführlichere ersehen werden.

§. 184.

Erklärungen:

1tens, Ein continuirlicher oder stetiger oder Kettenbruch ist ein Bruch kleinster Benennung, der so dar-

gestellt, daß dessen Nenner aus einer gemischten Zahl besteht, von welcher der Nenner ihres jederzeit ächten Bruches wieder eine gemischte Zahl ist und dieß so fort bis zu Ende oder bis ins Unendliche; z. B.

$\cfrac{a}{b+c}$ ist ein ächter, und $a+\cfrac{b}{c+d}$ ein unächter.

$\cfrac{a}{b+c}$ $\qquad$ oder $\qquad$ $a+\cfrac{b}{c+d}$

$\cfrac{b+d}{b+e}$ $\qquad$ $\cfrac{e+f}{c+g}$

$b+\text{ꝛc.}$ $\qquad$ $e+\text{ꝛc.}$

2tens, Wiederhohlen die Nenner eines continuirlichen Bruches in derselben Ordnung, so heißt solcher ein periodischer continuirlicher Bruch, wie z. B.

$\cfrac{a}{b+c}$ $\qquad$ oder $\qquad$ $a+\cfrac{b}{c+d}$

$\cfrac{b+d}{b+e}$ $\qquad$ $\cfrac{e+f}{c+g}$

$b+\text{ꝛc.}$ $\qquad$ $e+\text{ꝛc.}$

3tens, Die ganze Zahl eines Nenners heißt der, diesem Bruche zugehörige Quotient, und diese ganze Zahl nebst ihrem zugehörigen, in einen einzigen Bruch zusammengezogenen Bruch, heißt der, diesem Quotienten zugehörige vollständige Quotient; z. B. ist bei übigem Beispiel $\frac{p}{9} = \cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\cfrac{g}{h+\text{ꝛc.}}}}$

so ist $b+\frac{p}{9}$ der, dem Quotienten b zugehörige vollständige Quotient.

Zusaetze:

1tens, Jeder vollständige Quotient ist > 1, denn er ist eine gemischte Zahl.

2tens, Die in einem vollständigen Quotienten steckende größte ganze Zahl ist der ihm zugehörige Quotient.

3tens, Bei einem endlichen continuirlichen Bruch ist der letzte

Nenner eine ganze Zahl, und solche zugleich Quotient und vollständiger Quotient.

4tens, Ist a=0, so wird der oben dargestellte unächte Bruch ein ächter, und es gilt daher Alles, was von einem unächten Bruch erwiesen wird, mit dieser Rücksichtnahme auch von einem ächten.

5tens, Jeder endliche continuirliche Bruch läßt sich auf einen gewöhnlichen bringen, wenn man den letzten vollständigen Quotienten, welcher eine gemischte Zahl ist, in einen unächten Bruch verwandelt, und dieß so lange fortsetzet, bis man hiermit bis zu seinem Anfange gekommen ist; z.B. $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cfrac{f}{g}}}=\cfrac{(ace+be+ad)g+(ac+b)f}{(ce+d)g+cf}$;

denn $e+\cfrac{f}{g}=\cfrac{eg+f}{g}$, also der nächste vollständige Quotient (rückwärts) $=c+\cfrac{d}{\cfrac{eg+f}{g}}=\cfrac{(ce+d)g+cf}{eg+f}$,

und $a+\cfrac{b}{\cfrac{(ce+d)g+cf}{eg+f}}=\cfrac{(ace+be+ad)g+(ac+b)f}{(ce+d)g+cf}$;

6tens, Verwandelt man nach vorigem Zusatz einen unendlichen continuirlichen Bruch in einen gewöhnlichen, indem man hiebei die letzten Brüche von unten herauf wegläßt, so erhält man Brüche kleinster Benennung, welche Näherungswerthe desselben sind, und zwar um so mehr nähere, je weniger man dergleichen letzte Brüche hiebei wegläßt, und man nennt diese Näherungswerthe gegen den vollständigen Werth convergirende Brüche, weil, wenn man sie so, wie man sie erhält, indem man zu ihrer Bestimmung immer einen Bruch des continuirlichen Bruches mehr beisetzet, in eine Reihe schreibet, ihr Unterschied in Beziehung des continuirlichen Bruches immer mehr abnimmt; (nach 4ten Zus. des §. 185).

§. 185.

Lehrsatz:

Die gegen den vollständigen Werth $\frac{A}{B}$ eines continuirlichen Bruches convergirenden Brüche sind abwechselnd kleiner und größer als $\frac{A}{B}$; denn z. B. die gegen den continuirlichen Bruch $\frac{A}{B} = a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g}}} = \frac{(ace+be+ad)g+(ac+b)f}{(ce+d)g+cf}$ convergirenden Brüche sind $\frac{a}{1}$, $\frac{ac+b}{c}$ und $\frac{(ac+b)e+ad}{ce+d}$, aus welchen, wenn man sie auf einerlei Benennung mit dem vollständigen Werthe bringt, das Gesagte hervorgeht.

Zusaetze:

1tens, Der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und seinem Näherungswerth $\frac{P}{q}$ ist dem Unterschiede von $\frac{A}{B}$ und seinem zunächst vor oder nach $\frac{P}{q}$ kommenden Näherungswerth in Beziehung des Zeichens entgegengesetzt.

2tens, Das Zeichen der Unterschiede zweyer nach der Ordnung auf einander folgenden convergirenden Brüche wechselt mit + und —;

3tens, Der Unterschied zweyer auf einander folgenden gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche ist dem Produkte aller vor diesen beyden Brüchen im continuirlichen Brüche hergehenden Zähler dividirt durch das Produkt ihrer beyden Nenner, gleich; d. i. z. B. der Unterschied der in obigem Beispiel auf einander folgenden convergirenden Brü-

die $\frac{(ac+b)e+ad}{ce+d}$ und $\frac{(ace+be+ad)g+(ac+b)f}{(ce+d)g+cf}$ ist $=$

$$\frac{bdf}{(ce+d)((ce+d)g+cf)}.$$

4tens, Die auf einander folgenden gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche kommen dem Werthe von $\frac{A}{B}$ immer näher, die Zahlen ihrer Zähler und Nenner werden immer größer und alle sind Brüche kleinster Benennung.

§. 186.

Lehrsatz:

Bey jedem, gegen einen continuirlichen Bruch convergirenden Bruch ist der Zähler dem Produkte von dem Zähler des vorhergehenden convergirenden Bruches in den nun zur Bildung des jetzigen, nach 6ten Zus. des §. 184 dazu zu nehmenden Quotienten, + dem Produkte von dem Zähler des vorvorgehenden convergirenden Bruches in den nun, zur Bildung des jetzigen, noch dazu zu nehmenden Zähler gleich, welches ebenso von seinem Nenner in Beziehung der Nenner der beyden zunächst vorhergehenden convergirenden Brüche gilt; d. i. sind $\frac{ac+b}{c}$ und $\frac{(ac+b)e+ad}{ce+d}$, zwey auf einander folgende gegen einen continuirlichen Bruche $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche, so ist, wenn der zur Bildung des nun folgenden gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Bruches noch von dem continuirlichen Bruche dazu zu nehmende Bruch $=\frac{f}{g}$ ist, dieser folgende gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Bruch

$$=\frac{(ace+be+ad)g+(ac+b)f}{(ce+d)g+cf};$$ denn, wenn $\frac{A}{B}$

$= a + \cfrac{b}{c+d}$, so sind $\frac{a}{1}$, $\frac{ac+b}{c}$, $\frac{(ac+b)e+ad}{ce+d}$,

$\cfrac{e+f}{g+\text{ꝛc.}}$

$\frac{(ace+be+ad)g+(ac+b)f}{(ce+d)g+cf}$, ꝛc. die gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche, woraus der Lehrsatz hervorgeht, zumal, wenn man der Analogie wegen, als vorderen Bruch $\frac{1}{0}$ hinzusetzet.

Zusaetze:

1tens, Bei einem durch diesen Ausdruck dargestellt werdenden ächten Bruch sind daher die gegen ihn convergirenden Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{be}{ce+d}$, $\frac{beg+bf}{(ce+d)g+cf}$, ꝛc.

2tens, Aus jedem continuirlichen Bruche kann man daher sehr leicht alle gegen ihn convergirenden Brüche der Ordnung nach bestimmen.

3tens, Der Unterschied eines gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Bruches und des ihm folgenden, hat bei gerader Stelle des Letztern (wobei man von dem vorne beigesetzten Bruch $\frac{1}{0}$ an zählet) das Zeichen —, außerdem +; nach 2ten Zus. des vorigen §.)

4tens, Ein gegen $\frac{A}{B}$ convergirender Bruch an ungerader Stelle ist größer, und einer an gerader Stelle kleiner als $\frac{A}{B}$, der Unterschied des erstern gegen $\frac{A}{B}$ hat das Zeichen +, der andere das Zeichen —;

§. 187.

Lehrsatz:

Jeder gewöhnliche in rationalen Zahlen gegebene Bruch wird in einen continuirlichen Bruch, dessen Zähler alle $= 1$ sind, verwandelt, wenn man Zähler und Nenner durch den

kleinern dieser beyden dividirt und dieses Verfahren bey jedem dadurch entstehenden neuen Bruch fortsetzet, d. i. wenn man wie bei Aufsuchung des größten gemeinen Maaßes für den Zähler und Nenner (nach §. 43.) verfährt und die dadurch erhaltenden Quotienten der Ordnung nach zu den Quotienten des continuirlichen Bruches nimmt. Z. B. da

	2	2	16	2	1	3
371	922	371	180	11	4	3
	742	360	11	8	3	3
	180	11	70	3	1	*
			66			
			4			

so ist $\frac{922}{371} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$ und $\frac{371}{922} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$;

Zusaetze:

1tens, Jeder continuirliche Bruch läßt sich nach diesem Lehrsatze gemäß 5ten Zus. des §. 184 in einen dergleichen mit den Zählern 1 verwandeln und durch $a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{rc.}}}}$ darstellen,

wobei b, c, d, u. s. w. lauter ganze Zahlen sind, und, wenn $a = 0$, ist er ein ächter, außerdem ein unächter Bruch.

2tens, Dergleichen continuirliche Brüche mit den Zählern 1 sind in der Anwendung die nützlichsten, daher sie in den folgenden Abschnitten besonders betrachtet werden.

Zweyter Abschnitt.

Von den continuirlichen Brüchen, deren Zähler = 1 sind.

§. 188.

Lehrsaetze:

1tens, Wenn $\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{&c.}}}$ ist, so giebt es keinen andern continuirlichen Bruch, der den Werth von $\frac{A}{B}$ vollkommen ausdrücke, insoferne die Quotienten a, b, c, u. s. w. ganze positive Zahlen sind, wie solches aus ihrer Bildung nach §. 187 hervorgeht.

2tens, Bei jedem gegen einen continuirlichen Bruch convergirenden Bruch ist (nach Lehrs. des §. 186) der Zähler dem Produkte von dem Zähler des vorhergehenden convergirenden Bruches in den nun zur Bildung des jetzigen nach 6ten Zus. des §. 184 noch von dem continuirlichen Bruch dazu zu nehmenden Quotienten + dem Zähler des vorvorgehenden convergirenden Bruches gleich, welches ebenso von seinem Nenner in Beziehung der Nenner der beyden zunächst vorhergehenden convergirenden Brüche gilt. Es sind also von $\frac{922}{371}$, da (nach §. 187) die Quotienten der Ordnung nach 2, 2, 16, 2, 1, 3, sind, die Näherungswerthe, oder gegen ihn convergirenden Brüche:

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{82}{33}, \frac{169}{68}, \frac{251}{101}, \frac{922}{371},$$

und von $\frac{371}{149}$ sind sie:

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{5}, \frac{33}{82}, \frac{68}{169}, \frac{101}{251}, \frac{371}{922};$$

Zusaetze:

1tens, Wenn man zwey auf einander folgende convergirende Brüche übers Kreuz multiplicirt, so ist ihr Unterschied $= \pm 1$, dann

2tens, der Unterschied zweyer auf einander folgenden convergirenden Brüche ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt ihrer Nenner ist, (nach 3ten Zus. des §. 185); z. B. von $\frac{5}{2}$ und $\frac{8}{3}\frac{2}{5}$ ist die Differenz $\frac{1}{6}\frac{1}{6}$.

3tens, Da der Werth eines continuirlichen Bruches zwischen zwey auf einander folgende gegen ihn convergirende Brüche fällt, so ist auch nach vorigem Zusatz der Unterschied eines continuirlichen Bruches und seines gegen ihn convergirenden Bruches kleiner, als ein Bruch, dessen Zähler 1, und dessen Nenner das Produkt seines Nenners und des Nenners des darauf folgenden convergirenden Bruches ist, also umsomehr kleiner als ein Bruch, dessen Zähler 1, und dessen Nenner das Quadrat des convergirenden Bruches ist; z. B. $(\frac{9}{3}\frac{2}{7}\frac{2}{1} - \frac{5}{2})$ $< \frac{1}{2.33}$ und $< \frac{1}{2^2}$.

§. 189.

Lehrsatz:

Der Unterschied des Werthes $\frac{A}{B}$ eines continuirlichen Bruches, und des gegen ihn convergirenden Bruches ist grösser, als ein Bruch, dessen Zähler 1, und dessen Nenner das Produkt seines Nenners und des um solchen vermehrten Nenners des darauf folgenden convergirenden Bruches ist; d. i. z. B. bei dem Beispiel im vorigen § ist $(\frac{9}{3}\frac{2}{7}\frac{2}{1} - \frac{5}{2}) > \frac{1}{2(2+33)}$;

Beweis:

Sind $\frac{P}{Q'}\ \frac{P^I}{Q^I}$, $\frac{P^{II}}{Q^{II}}$, drey unmittelbar auf einander folgende gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche, dann der hiebei letzte Quotient m und der ihm zugehörige vollständige Quotient q, so ist

$\frac{P^{II}}{Q^{II}} = \frac{mP^I+P}{mQ^I+Q}$ (nach Lehrs. des §. 186), daher

$\frac{A}{B} = \frac{qP^I+P}{qQ^I+Q}$ (nach 5ten Zus. des §. 184), also

$$\frac{A}{B} - \frac{P^I}{Q^I} = \frac{Q^I(qP^I+P)-P^I(qQ^I+Q)}{Q^I(qQ^I+Q)} = \frac{Q^IP-P^IQ}{Q^I(qQ^I+Q)}$$

$$= \frac{1}{Q^I(qQ^I+Q)}; \text{ (nach 1ten Zus. des §. 188);}$$

Da nun $q < m+1$, (nach 2ten Zus. des §. 184), so ist $qQ^I+Q < (m+1)\,Q^I+Q$, d. i. $< (mQ^I+Q)Q^I$, also auch

$$\frac{1}{Q^I(qQ^I+Q)} > \frac{1}{Q^I(Q^{II}+Q)}.$$

§. 190.

Lehrsatz:

Jeder Bruch $\frac{P^I}{Q^I}$ einer gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe ist dem Werthe $\frac{A}{B}$ näher, als jeder andere mögliche Bruch $\frac{m}{n}$ mit kleinerem Nenner.

Beweis:

Ist $\frac{m}{n}$ ein Bruch der convergirenden Reihe, so ist der Lehrsatz nach 4ten Zus. des §. 185 erwiesen. Ist aber $\frac{m}{n}$ ein anderer Bruch, $\frac{P}{Q}$ wieder wie im vorigen § der vor $\frac{P^I}{Q^I}$ hergehende convergirende Bruch, $n < Q^I$, $P'n - Q'm = M$, und $Pn - Qm = N$, so ist

$$MP = PP'n - PQ'm;$$
$$NP^I = P'Pn - P'Qm;$$
$$MQ = QP'n - QQ'm;$$
$$NQ^I = Q'Pn - Q'Qm;$$

daher auch

$$MP - NP' = (P'Q - PQ')m = \pm m$$
$$MQ - NQ' = (QP' - Q'P)n = \pm n,$$

(nach 1ten Zuf. des §. 188); es haben daher, weil $n < Q'$ iſt, M und N einerlei Zeichen, und

$$n\frac{A}{B} = (MQ - NQ')\frac{A}{B}; \text{ dann}$$

$$n\frac{A}{B} - m = MQ\frac{A}{B} - NQ'\frac{A}{B} = MP + NP'$$
$$= (Q\frac{A}{B} - P)M - (Q'\frac{A}{B} - P')N.$$

Nun haben nach 1ten Zuf. des §. 185 $\frac{A}{B} - \frac{P}{Q}$ und $\frac{A}{B} - \frac{P'}{Q'}$, daher auch $\left(\frac{A}{B} - \frac{P}{Q}\right)Q$ und $\left(\frac{A}{B} - \frac{P'}{Q'}\right)Q'$, d. i. $Q\frac{A}{B} - P$ und $Q'\frac{A}{B} - P'$ verſchiedene Zeichen, alſo $(Q\frac{A}{B} - P)M$ und $-(Q'\frac{A}{B} - P')N$ einerlei Zeichen; demnach iſt $n\frac{A}{B} - m$ der Summe von $(Q\frac{A}{B} - P)M + (Q'\frac{A}{B} - P')N$ gleich, und $n\frac{A}{B} - m > Q'\frac{A}{B} - P'$, oder

$$\frac{n\frac{A}{B} - m}{Q'} > \frac{A}{B} - \frac{P'}{Q'} \text{ u. alſo}$$

$$\text{umſomehr } \frac{n\frac{A}{B} - m}{n} > \frac{A}{B} - \frac{P'}{Q'},$$

$$\text{d. i. } \frac{A}{B} - \frac{m}{n} > \frac{A}{B} - \frac{P'}{Q'}$$

und daher der Lehrſatz erwieſen.

§. 191.

Lehrſatz:

Zwiſchen zwey auf einander folgende Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$

einer gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe fällt kein dritter Bruch $\frac{m}{n}$ mit gleichem oder kleinerem Nenner, als der größere jener beyden ist.

Beweis:

Wäre $\frac{m}{n}$ ein zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^1}{Q^1}$ fallender Bruch und $n \lessgtr Q^1$, so wäre

$$\frac{m}{n} - \frac{P}{Q} \lessgtr \frac{P^1}{Q^1} - \frac{P}{Q}, \text{ daher}$$

$$\frac{mQ - nP}{nQ} \lessgtr \frac{P^1Q - PQ}{Q^1Q}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{mQ - nP}{n} \lessgtr \frac{\pm 1}{Q^1}.$$

Nun ist $n \lessgtr Q^1$, also $\frac{1}{n} \gtrless \frac{1}{Q^1}$, und da

$mQ - nP > 0$, so wäre auch

$$\frac{mQ - nP}{n} \gtrless \frac{\pm 1}{Q^1},$$

und es kann also $\frac{m}{n}$ nicht zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^1}{Q^1}$ fallen, weil diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

§. 192.

Lehrsatz:

Wenn aber von zweyen aufeinander folgenden gegen $\frac{A}{B}$ größeren oder kleineren Brüchen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^{II}}{Q^{II}}$ einer gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe, ihr Unterschied $\frac{P}{Q} - \frac{P^{II}}{Q^{II}}$ $= \frac{P}{Q} - \frac{mP^1+P}{mQ^1+Q}$, (wie in §. 189), also $= \frac{m(Q^1P - P^1Q)}{Q(mQ^1+Q)}$

$= \frac{m}{QQ^{II}}$ und $m > 1$ ist, so lassen sich $m-1$ Brüche:

$$\frac{1P^{I}+P}{1Q^{I}+Q}, \quad \frac{2P^{I}+P}{2Q^{I}+Q}, \text{ u. s. w. } \frac{(m-1)P^{I}+P}{(m-1)Q^{I}+Q}$$

einschalten, welche daher auch Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$ und so wie $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^{II}}{Q^{II}}$ größer oder kleiner als $\frac{A}{B}$ sind. Diese eingeschaltet werden könnenden Brüche nennt man, weil sie nicht zu den gegen $\frac{A}{B}$ abwechselnd größeren und kleineren Brüchen der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe gehören, Nebenbrüche, jene dagegen Hauptbrüche.

Beweis:

Sind $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^{II}}{Q^{II}}$ wie im vorigen §. zwey auf einander folgende größere oder kleinere Brüche, als $\frac{A}{B}$, so ist nach oben $\frac{P}{Q} - \frac{P^{II}}{Q^{II}} = \frac{m}{QQ^{II}}$, und daher, wenn $m=1$ ist, zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^{II}}{Q^{II}}$ (nach 1ten Zus. des §. 188 und nach §. 191) kein Bruch mit kleinerem Nenner, als Q^{II}. Wenn aber $m > 1$, so lassen sich zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^{II}}{Q^{II}} = \frac{mP^{I}+P}{mQ^{I}+Q}$ die Brüche $\frac{1P^{I}+P}{1Q^{I}+Q}, \frac{2P^{I}+P}{2Q^{I}+Q}$ ..... und $\frac{(m-1)P^{I}+P}{(m-1)Q^{I}+Q}$ denken, denn nimmt man die Näherungswerthe $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^{I}}{Q^{I}}$ einander gleich, so wären auch (nach 4ten Zus. des §. 83) die Brüche $\frac{1P^{I}+P}{1Q^{I}+Q}, \frac{2P^{I}+P}{2Q^{I}+Q}$ ..... und $\frac{(m-1)P^{I}+P}{(m-1)Q^{I}+Q}$, deren Zähler und Nenner arithmetisch wachsen, einander gleich, sie sind daher so wenig von einander unterschieden, daß sie auch

Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$, und zwar Zwischenwerthe der, in der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe vorkommenden, Näherungswerthe $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^1}{Q^1}$ sind.

Zusätze:

1tens, Diese Nebenwerthe haben einen Bruch, dessen Zähler 1, und dessen Nenner das Produkt ihrer Nenner ist, zur Differenz, denn z. B. $\frac{(m-2)P^1+P}{(m-2)Q^1+Q} - \frac{(m-1)P^1+P}{(m-1)Q^1+Q}$

$= \frac{PQ^1-P^1Q}{((m-2)Q^1+Q)((m-1)Q^1+Q)}$

$= \frac{1}{((m-2)Q^1+Q)((m-1)Q^1+Q)}$, (nach 1ten Zus. des §. 188); es giebt daher für zwey von ihnen keinen Zwischen-Bruch mit kleinerem Nenner, als der größere von ihnen hat, (nach vorigem §.)

2tens, Ebenso wären die Brüche $\frac{P^1-1P}{Q^1-1Q}$, $\frac{P^1-2P}{Q^1-2Q}$ u.s.w. Näherungswerthe, da aber $\frac{mP+P^\circ}{mQ+Q^\circ} = \frac{P^1}{Q^1}$, so ist auch

$\frac{P^1-1P}{Q^1-1Q} = \frac{mP+P^\circ-1P}{mQ+Q^\circ-1Q} = \frac{(m-1)P+P^\circ}{(m-1)Q+Q^\circ}$, d. h. sie entstehen aus den vor $\frac{P^1}{Q^1}$ hergehenden zwey Brüchen, wie die im Lehrsatz angegebenen, sind daher nicht besonders zu berücksichtigen und fallen zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P^\circ}{Q^\circ}$.

3tens, Auch die Brüche $\frac{1P+P^1}{1Q+Q^1}$, $\frac{2P+P^1}{2Q+Q^1}$, &c. wären hiernach Näherungswerthe, allein da sie zwischen $\frac{P}{Q}$ und seinem vorhergehenden Bruch fallen, und ihre Nenner schon größer, als die Nenner der nach 2tens ebenfalls zwi-

schen diese fallenden Brüche sind, so sind solche in Beziehung derselben keine Näherungswerthe.

4tens, Die Nebenbrüche kann man daher nach 2ten Zus. aus den Hauptbrüchen dadurch bestimmen, daß man den Zähler und Nenner des vorhergehenden von dem Zähler und Nenner des folgenden Hauptbruches nach und nach abzieht; z. B. zwischen die Hauptbrüche $\frac{5}{2}$ und $\frac{32}{13}$ des Beispiels in §. 188 fallen die 15 Nebenbrüche $\frac{27}{11}$, $\frac{22}{9}$, $\frac{67}{27}$, $\frac{62}{25}$, $\frac{57}{23}$, $\frac{52}{21}$, $\frac{47}{19}$, $\frac{42}{17}$, $\frac{37}{15}$, $\frac{32}{13}$, $\frac{27}{11}$, $\frac{22}{9}$, $\frac{17}{7}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{7}{3}$, oder man kann sie gleich mit den Hauptbrüchen dadurch bestimmen, daß man bei dem in §. 188 angegebenen Verfahren jeden Quotienten m von 1 bis m nimmt, d. i. mit ihm m Brüche bestimmt.

5tens, Eingeschaltete oder Neben-Brüche sind so, wie der ihnen folgende Hauptbruch größer oder kleiner, als $\frac{A}{B}$.

6tens, Zwischen zwey Glieder der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ größeren Brüche sowohl, als zwischen die der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ kleineren Brüche, läßt sich kein Bruch mit kleinerem oder ebenso großem Nenner gemäß 1ten Zus. einschalten; es giebt daher, außer den durch die Haupt- und Nebenbrüche bestimmten Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$ keine, welche demselben ebenso nahe kämen und zugleich mit kleineren Zahlen geschrieben werden könnten.

§. 193.

Lehrsatz:

Continuirliche Brüche mit negativen Gliedern können auf solche mit positiven Gliedern gebracht werden, denn z. B.

1tens, $$m - \frac{1}{n} = \frac{mn-1}{n} = \frac{(m-1)n+n-1}{n} = m-1+\frac{n-1}{n}$$

$$= m-1+\cfrac{1}{\cfrac{n}{n-1}} = m-1+\cfrac{1}{\cfrac{(n-1)+1}{n-1}} = (m-1)$$
$$+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(n-1)}}$$

2tens, $a+\cfrac{1}{-b+\cfrac{1}{c}} = a+\cfrac{1}{\cfrac{-bc+1}{c}} = a+\cfrac{-c}{bc-1}$

$$= a-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c}},$$

aber nach 1tens, $b-\cfrac{1}{c} = (b-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(c-1)}}$, daher

$$a-\cfrac{1}{-b+\cfrac{1}{c}} = (a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(b-1)-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(c-1)}}}}$$

$$= (a-1)+\cfrac{1}{-1+\cfrac{1}{(b-2)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(c-1)}}}};$$

Zusatz:

Ebenso ist

$$1^{\text{tens}}, (a+1)-\cfrac{1}{(b+1)} = a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}};$$

$$2^{\text{tens}}, (a+1) - \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{b}} = a + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}}}$$

$$3^{\text{tens}}, (a+1) - \cfrac{1}{3-\cfrac{1}{(b+1)}} = a + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}}}}$$

$$4^{\text{tens}}, a + \cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{-d+\cfrac{1}{c}}}} = a + \cfrac{1}{(b-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(c-1)+\cfrac{1}{(d-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c}}}}}}$$

§. 194.

Aufgabe:

Eine irrationale Größe A durch einen continuirlichen Bruch darzustellen.

Auflösung:

1tens, Man suche die größte in der irrationalen Größe A steckende ganze Zahl b, so ist dann $(A-B) < 1$, also $\frac{1}{A-b} > 1$; nun setze man $A - b = \frac{1}{z}$, so ist

$$z = \frac{1}{A-b} > 1.$$

2tens, Man suche daher wieder die in $z = \frac{1}{A-b}$ steckende

größte ganze Zahl c, indem man hiezu die Irrationalität aus dem Nenner in den Zähler überträgt, setze dann

$$z = b + \frac{1}{z'}; \text{ und}$$

3tens, setze dieses Verfahren so lange, als möglich ist, fort, so kommt man durch lauter rationale Größen dem irrationalen Werthe A immer näher.

§. 195.

Aufgabe:

Es soll $\sqrt{a}$ durch einen continuirlichen Bruch ausgedrückt werden.

Auflösung:

1tens, Ist die in $\sqrt{a}$ steckende größte ganze Zahl $= b$, so setze man (nach vorigem §) $\sqrt{a} = b + \frac{1}{z}$ und bestimme den ersten vollständigen Quotienten $z = \frac{1}{\sqrt{a} - b'}$ weshalb man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a} + m$ multiplicirt und dadurch $z = \frac{\sqrt{a} + m}{a + (m - b)\sqrt{a} - bm}$ erhält, daher man, weil die Irrationalgröße im Nenner dadurch verschwinden soll, findet, daß man $m = b$ und $z = \frac{\sqrt{a} + b}{a - b^2}$ nehmen muß.

2tens, Die in z steckende größte ganze Zahl c muß daher in $\frac{2b}{a - b^2}$ enthalten seyn, woraus sie sich, wenn a in ganzen Zahlen gegeben und also (nach 1tens,) b in dergleichen gefunden ist, leicht ergiebt, und daher als bekannt angesehen werden kann, indem man $z = \frac{\sqrt{a} + b}{a - b^2} = c + \frac{1}{z'}$ setzet.

3tens, z' ist nun ebenfalls ein vollständiger Quotient und

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2} - c} = \frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b-(a-b^2)c}, \text{ daher, wenn}$$

man $b-(a-b^2)c = -n$ setzet und die Irrationalität aus dem Nenner wieder dadurch in den Zähler überträgt, daß man beyde mit $\sqrt{a}+n$ multiplicirt, erhält man

$$z^1 = \frac{a\sqrt{a}-b^2\sqrt{a}+an-b^2n}{a-n\sqrt{a}+n\sqrt{a}-n^2} = \frac{(a-b^2)(\sqrt{a}+n)}{a-n^2}$$

$$= \frac{(a-b^2)(\sqrt{a}+n)}{a-(b-(a-b^2)c)^2} = \frac{(a-b^2)(\sqrt{a}+n)}{a-b^2+2bc(a-b^2)-(a-b^2)^2c^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+n}{1+2bc-(a-b^2)c^2};$$

4tens, Da nun der Nenner bei z, z^1, u. s. w. durch das Fortsetzen dieses Verfahrens immer aus bekannten Zahlen besteht, so kann man jeden $= q$ setzen, wodurch jeder vollständige Quotient einerlei Form $\frac{\sqrt{a}+p}{q}$ erhält.

5tens, Ist nun irgend ein vollständiger Quotient, z. B. $z^{II} = \frac{\sqrt{a}+P}{Q} = d + \frac{1}{z^{III}}$, so ist $z^{III} = \frac{Q}{\sqrt{a}-(dQ-P)}$ auch von der Form $\frac{\sqrt{a}+p}{q}$; setzt man nun

$$\frac{Q}{\sqrt{a}-(dQ-P)} = \frac{\sqrt{a}+P^1}{Q^1}, \text{ so ist}$$

$$QQ^1 = (P^1-(dQ-P))\sqrt{a}+a-(dQ-P)P^1.$$

Setzt man die rationalen und irrationalen Glieder der beyden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$(P^1-(dQ-P))\sqrt{a} = 0; \text{ und } QQ^1 = a-(dQ-P)P^1;$$

$$P^1 = dQ-P; \qquad Q^1 = \frac{a-(dQ-P)P^1}{Q};$$

$$= \frac{a-P(^1)^2}{Q};$$

6tens, Weiß man daher den ersten vollständigen Quotienten,

welcher $\frac{\sqrt{a}+0}{1}$ ist, so kann man aus 5^tens alle folgenden vollständige Quotienten und aus jedem seinem ihm zugehörigen Quotienten leicht finden. Da nun überdieß die Werthe von P, P^1, Q, und Q^1 immer ganze positive Zahlen sind, und für P und P^1 ꝛc. höchstens $= b$, dann für Q und Q^1 höchstens $= 2b$, d. i. der doppelten in $\sqrt{a}$ steckenden größten ganzen Zahl gleich seyn können, so muß auch, da der Werth einer irrationalen Quadratwurzel nur durch einen unendlichen continuirlichen Bruch ausgedrückt werden kann, ein zuerst vorgekommener und daher auch die blos dahin ihm im Anfange nachgekommenen vollständigen Quotienten, folgl. auch die Quotienten wiederholen, daher ist der eine irrationale Quadratwurzel ausdrückende continuirliche Bruch ein periodischer.

7^tens, Man setze daher das Bestimmen der Glieder des continuirlichen Bruches so lange fort, als man will, oder bis man die Periode des der $\sqrt{a}$ gleichen continuirlichen Bruches gefunden hat, und also die unendlichen Glieder desselben nach ihrer Ordnung angeben kann.

Dritter Abschnitt.

Anwendung der continuirlichen Brüche.

§. 196.

Aufgabe:

Es sollen alle Verhältnisse in kleineren Zahlen angegeben werden, welche in solchen dem gegebenen Verhältniß der Entfernung des Merkurs und der Venus von der Sonne, $=8009680:15081946$, Annäherungsweise möglichst gleich ist.

Oder, was einerlei, es sollen die, dem Bruche $\frac{8009680}{15081946}$ in kleineren Zahlen möglichst nahe kommenden Brüche angegeben werden.

Auflösung:

1^tens, Man suche nach §. 187 die zur Bildung des ihm gleichen continuirlichen Bruches nöthigen Quotienten, welche, da

	1	1	7	1	1
8009680	15081946	8009680	7072266	937414	510368
	8009680	7072266	6561898	510368	427046
1	7072266	937414	510368	427046	83322

	5	7	1	61	1	6	1	1	5
83322	427046	83322	10436	10270	166	144	22	12	10
	416610	73052	10270	996	144	132	12	10	10
	10436	10270	166	310	22	12	10	2	ø
				166					
				144					

1, 1, 7, 1, 1, 5, 7, 1, 61, 1, 6, 1, 1, 5, sind.

2^tens, Bestimme aus solchen nach 2ten Lehrsatz des §. 188 seine Näherungswerthe und zugleich nach 4ten Zus. des §. 192 deren Nebenbrüche, welche also sind:

$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \frac{7}{13}, \frac{8}{15}, \frac{9}{17}, \frac{17}{32}, \frac{26}{49}, \frac{43}{81},$

$\frac{60}{113}, \frac{77}{145}, \frac{94}{177}, \frac{111}{209}, \frac{205}{386}, \frac{299}{563}, \frac{393}{740}, \frac{487}{917}, \frac{581}{1094},$

$\frac{675}{1271}, \frac{769}{1448}, \frac{1444}{2719}, \frac{2213}{4167}, \frac{2982}{5615}, \frac{3751}{7063}, \frac{4520}{8511}, \frac{5289}{9959}, \frac{6058}{11407},$

$\frac{6827}{12855}, \frac{7596}{14303}, \frac{8365}{15751}, \frac{9134}{17199}, \frac{9903}{18647}, \frac{10672}{20095}, \frac{11441}{21543},$

$\frac{12210}{22991}, \frac{12979}{24439}, \frac{13748}{25887}, \frac{14517}{27335}, \frac{15286}{28783}, \frac{16055}{30231}, \frac{16824}{31679},$

$\frac{17593}{33127}, \frac{18362}{34575}, \frac{19131}{36023}, \frac{19900}{37471}, \frac{20669}{38919}, \frac{21438}{40367}, \frac{22207}{41815},$

$\frac{22976}{43263}, \frac{23745}{44711}, \frac{24514}{46159}, \frac{25283}{47607}, \frac{26052}{49055}, \frac{26821}{50503}, \frac{27590}{51951},$

$\frac{28359}{53399}, \frac{29128}{54847}, \frac{29897}{56295}, \frac{30666}{57743}, \frac{31435}{59191}, \frac{32204}{60639}, \frac{32973}{62087},$

$\frac{33742}{63535}, \frac{34511}{64983}, \frac{35280}{66431}, \frac{36049}{67879}, \frac{36818}{69327}, \frac{37587}{70775}, \frac{38356}{72223}.$

$\frac{39125}{73071}'$ $\frac{39804}{75119}'$ $\frac{40663}{76567}'$ $\frac{41432}{78015}'$ $\frac{42201}{79463}'$ $\frac{42970}{80911}'$ $\frac{43739}{82359}'$

$\frac{44508}{83807}'$ $\frac{45277}{85255}'$ $\frac{46046}{86703}'$ $\frac{46815}{88151}'$ $\frac{47584}{89599}'$ $\frac{48353}{91047}'$

$\frac{95937}{180646}'$ $\frac{144290}{271693}'$ $\frac{192643}{362740}'$ $\frac{240996}{453787}'$ $\frac{289349}{544834}'$ $\frac{337702}{635881}'$

$\frac{386055}{726928}'$ $\frac{723757}{1362809}'$ $\frac{1109812}{2089737}'$ $\frac{1833560}{3452546}'$ $\frac{2557326}{4815355}'$

$\frac{3281083}{6178164}'$ und der ihm gleiche $\frac{4004840}{7540973}'$, wobei die unterstrichenen die Hauptbrüche sind.

3tens, Nehme nun aus solchen denjenigen, der nach den vorhandenen Umständen der passenden ist, wobei man, wenn man ein Verhältniß durch Räderwerk darstellen will, vorzüglich darauf zu sehen hat, daß sich Zähler und Nenner des hiezu wählenden Bruches (oder die Zahlen des Verhältnisses) in nicht zu große Factoren zerlegen lassen.

§. 197.

Aufgabe:

In 27,32158601 Tagen durchläuft der Mond einmal den Thierkreis, es soll nun dieses Verhältniß so durch Annäherung bestimmt werden, daß man es bequem zur Herstellung des Mondlaufes mittelst Räderwerks gebrauchen kann.

Auflösung:

1tens, 27,32158601 : 1 = 2732158601 : 100000000.

		27	3	9	7
2tens,	100000000	2732158601	100000000	32158601	3524197
		2700000000	96475803	31717773	3085796
		32158001	3524197	440828	438401

u. s. w., also die Quotienten: 27, 3, 9, 7, u. s. w.

3tens, daher die Näherungswerthe aus den Hauptbrüchen

$\frac{1}{0}'$ $\frac{27}{1}'$ $\frac{82}{3}'$ $\frac{765}{28}'$ $\frac{5437}{199}'$ u. s. w.

wovon $\frac{765}{28} = \frac{3.3.5.17}{4.7}$ dem Verlangen entspricht, und man eine hiernach eingerichtete Uhr, da dieses Verhältniß $13\frac{1}{2}$ Secunden zu klein ist, nur alle 5 Umlaufszeiten eine Minute vorrücken darf.

§. 198.

Aufgabe:

Es soll $\sqrt{17}$ durch einen continuirlichen Bruch dargestellt werden.

Auflosung:

Man bestimme nach der Aufl. 5tens und 6tens des §. 195 die nach und nach folgenden vollständigen Quotienten und die ihnen zugehörigen Quotienten, so hat man durch solche den continuirlichen Bruch; man setze also:

1tens, $\sqrt{17} = \frac{\sqrt{a}+p}{q} = \frac{\sqrt{17}+0}{1}$, daher $p=0$, $q=1$, daher der 1te Quotient d, oder die darinn steckende ganze Zahl $=4$; $p^1 = dq-p = 4$; $q^1 = \frac{a-(p^1)^2}{q} = 1$, und

2tens, der 2te vollständige Quotient $\frac{\sqrt{a}+p^1}{q^1} = \frac{\sqrt{17}+4}{1}$, daher der 2te Quotient $d^1 = 8$; $p^{11} = d^1q^1-p^1 = 4$; $q^{11} = \frac{a-(p^{11})^2}{q^1} = 1$; und

3tens, der 3te vollständige Quotient $\frac{\sqrt{a}+p^{11}}{q^{11}} = \frac{\sqrt{17}+4}{1} =$ dem 2ten vollständigen Quotienten, daher der Quotient 8 wiederholt und

4tens, $\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8+1}}$ ist.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 8+$ &c.

§. 199.

Aufgabe:

Es soll die $\sqrt{38}$ durch einen in ganzen Zahlen ausgedrückten Bruch so dargestellt werden, daß es keinen Bruch in kleineren Zahlen giebt, der ihr ebenso nahe käme.

Auflosung:

Nach vorigem §. ist

$1^{tens}_{"}$, $\sqrt{38} = \frac{\sqrt{a}+p}{q} = \frac{\sqrt{38}+0}{1}$, daher $p=0$, $q=1$, der 1te Quotient $d=6$, $p^1=dq-p=6$; $q^1=\frac{a-(p^1)^2}{q}=2$;

und

$2^{tens}_{"}$, $\frac{\sqrt{a}+p^1}{q^1} = \frac{\sqrt{38}+6}{2}$; also der 2te Quotient $d^1=6$;

$p^{11}=d^1q^1-p^1=6$; $q^{11}=\frac{a-(p^{11})^2}{q^1}=1$; und

$3^{tens}_{"}$, $\frac{\sqrt{a}+p^{11}}{q^{11}} = \frac{\sqrt{38}+6}{1}$; also der 3te Quotient $d^{11}=12$; $p^{111}=d^{11}q^{11}-p^{11}=6$; $q^{111}=\frac{a-(p^{11})^2}{q^{11}}=2$;

und

$4^{tens}_{"}$, $\frac{\sqrt{a}+p^{111}}{q^{111}} = \frac{\sqrt{38}+6}{2} = \frac{\sqrt{a}+p^1}{q^1}$; daher die Quotienten 6, 12, wiederkehrend. Es sind also

$5^{tens}_{"}$, die Quotienten der Ordnung nach:

6, 6, 12, 6, 12, 6, 12, u. s. w.

und nach 4ten Zus. des §. 192.

$6^{tens}_{"}$, Die Näherungswerthe von $\sqrt{38}=$

$$\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{13}{2}, \frac{19}{3}, \frac{25}{4}, \frac{31}{5}, \frac{37}{6}, \frac{43}{7}, \frac{80}{13},$$

$$\frac{117}{19}, \frac{154}{25}, \frac{191}{31}, \frac{228}{37}, \frac{265}{43}, \frac{302}{49}, \frac{339}{55}, \frac{376}{61}, \frac{413}{67}, \frac{450}{73},$$

u. s. w.

welche dem Verlangen entsprechen.

§. 200.

Aufgabe:

Es soll das Verhältniß der Seite eines Quadrats zu seiner Diagonale, welches $= 1 : \sqrt{2}$ ist, in ganzen Zahlen Annäherungsweise angegeben werden.

Auflösung:

Nach §. 198 ist:

1^{tens}, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{a+p}}{q} = \frac{\sqrt{2}+0}{2}$, daher $p=0$, $q=2$,

der 1te Quotient $d=0$, $p^1=0$, $q^1=1$ und

2^{tens}, $\frac{\sqrt{a+p^1}}{q^1} = \frac{\sqrt{2}+0}{1}$, der 2te Quotient $d^1=1$, $p^{11}=1$,

$q^{11}=1$; und

3^{tens}, $\frac{\sqrt{a+p^{11}}}{q^{11}} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$, der 3te Quotient $d^{11}=2$, $p^{111}=$

1; $q^{111}=1$; und

4^{tens}, $\frac{\sqrt{a+p^{111}}}{q^{111}} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \frac{\sqrt{a+p^{11}}}{q^{11}}$, daher der Quotient

2 immer wiederholt und

5^{tens}, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ꝛc.}}}}$

1, 2, 2, 2 u. s. w. sind, folglich

5^{tens}, Die Näherungsverhältnisse aus den Hauptbrüchen:

1:1, 2:3, 5:7, 12:17, 29:41, 70:99, 169:239, u. s. w.

sind.

Berichtigung.

Seite	Zeile	statt	soll es heißen
18	22	nach 3tens und 4tens	nach 2tens und 3tens
19	34	nach 5tens	nach 7tens
39	2	nach §. 16, 5tens	nach §. 16, 3tens
45	26	entspricht	ihr entspricht
48	9	Vielfachen	Einfachen
62	2	4, 2, 3	4, 2, 6
80	2 v.u.	ersten 0	ersten 0 blieb
81	20	die Zähler	den Zähler
94	19	sollte dem Satze »Beweis« voranstehen.	
101	4	sich §. 17	sich nach § 17
112	8	vorkommenden obwaltenden	vorkommenden
113	23	Der Exponent $a^{\frac{1}{mr:}}$	Der Exponent 1
120	9	$= a^{n}$	$= a^{n}$
123	6	Coefizienten	Exponenten
125	3	$= a^{\frac{1}{n}}$	$= \frac{1}{a^{n}}$
130	15	dieselben	die Wurzelexponenten
133	1	$\frac{\sqrt[5]{a}}{b2}$	$\sqrt[5]{\frac{a}{b2}}$
136	1	dann	denn,
141	27	< 20 seyn.	bestehn und muß < 20 seyn.
147	13	bestimme man	bestimme man aus
190	9	denn nach	demnach
199	19	$\frac{2700+}{\text{Ziffer}}$	$\frac{2700\,x}{\text{Glied}}$
208	21		
235	2	$i = \frac{Kp\Gamma}{PK}$	$i = \frac{kp\Gamma}{PK}$
241	26	die übrigen drey	die übrigen zwey
259	30	übiger	obiger
261	14	$= 0;$	$= 0{,}5;$
265	26	§. 145	§. 154
271	17	Integralrechnung	Integralrechnung angewendet
272	5	bei 3tens übigem $\frac{P}{9}$	obigem $\frac{P}{q}$
IV	21	9 Grän	$\frac{9}{8}$ Grän
X	12	2168	3168

XVI zwischen Nürnberg, Pfd.Handelsgew. u. Mark Münzgew. sollte stehen:

	Mk. Münzgew.	4962,6	3,6957093
Regensburg, Pfd. Handelsgew.		11804,	4,0720292

XXI bei M sind die Rubriktitel wie bei Seite VII, IVtens, A, zu setzen.

Anhang

über verschiedene Maaße, Gewichte und Münzen, (entnommen aus Magold's mathem. Lehrbuche), und über verschiedene andere Reductionen.

I.

Von den in Bayern üblichen Maaßen, Gewichten und Münzen

(nach königl. Regierungsblatt v. 11ten Merz 1809).

A) Vom Längenmaaße.

a) Der altbayerische Fuß oder Schuh ist (gemäß Regierungsblatt vom 11ten Mai 1809) die Einheit für das Längenmaaß und solcher bei + 13° Reaumür, = 129,38 Duodezimallinien des ehemaligen königl. pariser Fußes, = 291,8590 neue französische Mêtres.

b) Die Klafter hält 6 bayerische Fuß.

c) Die geometrische Ruthe ist 10 bayer. Fuß lang.

d) Die bayer. Elle hat 2 bayer. Fuß und $10\frac{1}{4}$ Zoll, daher 369,2720 Linien des altfranzös. Fußes oder 833,0110 neue franz. Mêtres.

e) Der Fuß hat im Duodezimalmaaße 12 Zoll oder 144 Linien, oder 1728 Scrupel, und im Dezimalmaaße 10 Zoll, oder 100 Linien, oder 1000 Scrupel.

f) Die geographische Meile, deren 15 auf einen Meridiangrad gehen, ist das in Deutschland größte Längenmaaß; Hr. v. Riedl setzt sie in der Einleitung zu seinem bayer. Atlas für Bayern, = 25406 bayer. Fuß, und hiernach wurden auch die Chaussée-Stundensäulen gesetzet.

B) Vom Flächenmaaße.

a) Um kleinere Flächen zu messen, nimmt man Quadrate zum Maaße, deren Seite, 1^{c}_{u} Ruthe, 1^{u}_{u} Fuß, 1^{u}_{u} Zoll, oder 1^{c}_{u} Linie hat; und es ist nach dem Duodezimalmaaße

1 □ Ruthe = 144 □ Fuß = 20736 □ Zoll = 2985984 □ Linien.
1 □ „ = 144 □ „ = 20736 □ „
1 □ „ = 144 □ „

und nach dem Dezimalmaaße

1 □ Ruthe = 100 □ Fuß = 10000 □ Zoll = 1000000 □ Linien.
1 □ „ = 100 □ „ = 10000 □ „
1 □ „ = 100 □ „

b) Um größere Flächen zu bestimmen, dient das Juchart oder Tagwerk, welches in Bayern genau 40000 bayer. Quadratfuß hat, und

c) das größte Flächenmaaß ist die Quadratmeile, und hat 6454648 36 □ Fuß.

C) Vom Körpermaaße.

Hiezu dient:

$1^{\text{tens}}_{\text{u}}$, der Cubikfuß, und es ist

a) im Duodezimalmaaße

1 C. Fuß = 1728 C. Zoll = 2985984 C. Lin. = 5159780352 C. Scrup.
1 „ = 1728 „ = 2985984 „
1 „ = 1728 „

b) im Dezimalmaaße

1 C. Fuß = 1000 C. Zoll = 1000000 C. Lin. = 1000000000 C. Scr.
1 „ = 1000 „ = 1000000 „
1 „ = 1000 „

$2^{\text{tens}}_{\text{u}}$, die Cubikmeile, als größtes Körpermaaß.

$3^{\text{tens}}_{\text{u}}$, die Klafter, als Holzmaaß; sie ist in Bayern 6 Schuhe im Quadrate und die Scheiter haben $3\frac{1}{2}$ Schuh Länge, sie hält also 126 Cubikfuß.

4tens, das Getränkmaaß hat die Maßkanne zur Einheit; sie hält 43 bayer. Dez. Cubikzoll und es ist:

1 Maß = 2 halbe Maß = 4 Quartl = 8 Achterl;
oder Seidl

1 Eymer hält 60 und 1 Visier Eymer 64 Maß.

5tens, Das Getreidmaaß; hievon ist der bayer. Schäffel die Einheit; er hält 208 bayer. Maß oder 8944 bayer. Dez. Cubikzoll, und es ist:

1 Schäffel = 6 Metzen = 12 Viertl = 24 halbe Viertl
od. $\frac{1}{2}$ Mtz. oder $\frac{1}{4}$ Metzen

= 48 Viertling = 96 halbe Viertling = 192 Dreyß'ger
oder $\frac{1}{8}$ Metzen oder $\frac{1}{16}$ Mtz. oder $\frac{1}{32}$ Metzen

= 384 halbe Dreyß'ger oder $\frac{1}{64}$ Metzen.

6tens, Das Papiermaaß; das Papier wird gezählt und es ist ein Ballen =

10	Riß	= 200	Buch	= 4800	Bog. Schrpap.	= 5000	Bog. Drckpap.
1	„	= 20	„	= 480	„ „	= 500	„ „
		1	„	= 24	„ „	= 25	„ „

7tens, Das Gewicht.

a) Das Handels- oder Civil-Gewicht; für dieses ist das bayer. Pfund die Einheit; es hält 560 Grammes französ. Gewicht oder 11655,168.. holländ. Asen, und es ist 1 Centner =

100	Pfd.	= 1600	Unz.	= 3200	Lth	= 12800	Quitl	= 51200	Pfggew.
1	„	= 16	„	= 32	„	= 128	„	= 512	„
		1	„	= 2	„	= 8	„	= 32	„
				1	„	= 4	„	= 16	„
						1	„	= 4	„

1 Pfennig-Gewicht = 15 Gran.

b) Das Apothekergewicht; dieses verhält sich zu dem Handelsgewicht genau, wie 14: 9, so, daß also 9

Civilpfunde = 14 Apothekerpfunden sind, und es ist 1 Pfund =

12 Unz. = 24 Loth = 96 Drachmen = 288 Scrupel = 5760 Gran,
od. Quintl

1 „ = 2 „ = 8 „ = 24 „ = 480 „
1 „ = 4 „ = 12 „ = 240 „
1 „ = 3 „ = 60 „
1 „ = 20 „

c) das bei dem Conventions-Münzfuß übliche Köllner-Gewicht, wovon die Mark = 4867,5 holl. Asen = 13 Lth. 1 Qtl. 1 Pfgwicht. 12, 36... Gran bayer. Handelsgewicht ist, und wobei für das Gold

1 Mark = 24 Karat = 96 Gran = 288 Grän
1 „ = 4 „ = 12 „
1 „ = 3 „

dann für das Silber 1 Pfd. = 2 dergl. Mark ist, und

1 Mark = 8 Unzen = 16 Loth = 64 Quintl = 256 Pfennige ist;

1 „ = 2 „ = 8 „ = 32 „ „
1 „ = 4 „ = 16 „ „
1 „ = 4 „ „

auch ist 1 Pfennig = 17 Eschen oder Aß = 256 Richtpfen. = 9 Grän

d) das Silbergewicht; hiezu dient allenthalben, mit Ausnahme der Stadt Augsburg, das Wiener-Markgewicht, welches sich zu dem Köllner-Gewicht, wie 6:5 verhält, und daher 1 Pfund zu 2 Mark = 11682 holl. Asen = 1 Pfund 1 Pfggwcht, 2,68... Grän bayer. Civilgewicht ist, und eben so, wie das Köllner-Gewicht eingetheilt wird.

D) Von Münzen.

I. Erklärungen von Münzen überhaupt.

1tens, Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber, oder beyden zugleich legiren, oder beschicken, heißt solche Metalle zusammenschmelzen.

2tens, Feines Gold oder Silber wird jenes genannt, welches keinen Zusatz von einem andern Metalle enthält; da nun die Mark Gold in 24 Karath, und die Mark Silber in 16 Loth getheilt wird, so heißt z. B.

a) 23 oder 18 karathiges Gold jenes Stück, von welchem 23 oder 18 Theile fein Gold, und die übrigen 1 oder 6 Theile fremdartiges Metall enthalten, und man drückt den feinen Gehalt durch $\frac{23}{24}$ oder $\frac{18}{24}$ aus.

b) 12 oder 14 löthiges Silber heißt jenes Stück, von welchem 12 oder 14 Theile rein Silber, und die übrigen 4 oder 2 Theile aus fremdartigem Metalle bestehen; man bezeichnet dieses mit $\frac{12}{16}$ oder $\frac{14}{16}$; u. s. w.

3tens, Man unterscheidet

a) reelle oder gangbare Münzen, d. i. wirklich geprägte Geldstücke, z. B. Ducaten, Conventionsthaler u. s. w.

b) fingirte oder Rechnungsmünzen, wodurch als Maaßstab der Werth der Dinge, und selbst der geprägten Münzen bestimmt wird, z. B. in Deutschland der Gulden, in England das Pfund Sterling, u. s. w.

4tens, Um den Werth der reellen Münzen nach fingirten zu bestimmen, kömmt es

a) auf die Beschaffenheit, und

b) das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalles an.

5tens, Das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalls zu bestimmen, braucht man in ganz Deutschland das Cölner Markgewicht; man nennt daher

a) eine Mark von feinem Golde oder Silber eine feine Mark, oder eine Markfein,

b) eine Mark des beschickten edlern Metalles eine rauche Mark, oder eine Markrauch.

6tens, Ferner heißt

a) das Gewicht einer Münzsorte ihr Schrot,

b) der Gehalt der Münze am edlern Metalle das Korn,
c) das Gesetz, wodurch Schrot, Korn und der Kaufwerth einer Münze bestimmt wird, der Münzfuß.

7tens, Die in Deutschland merkwürdigsten Münzfuße sind:

A) im Golde:

a) der Rheinische Goldguldenfuß, 72 Stück auf die rauche Mark von 18 Karath 6 Grän Gold, und 3 Karath Silber; nach diesem Fuße sind die bayer. Karolinen und Max'ors geprägt.
b) der Ducatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark von 23 Karath 8 Grän Gold, und 2 Grän Silber.

B) in Silber,

a) der alte Reichsfuß von 1566 auf dem Reichstage zu Augsburg, 8 Reichsthaler auf die rauhe und 9 auf die feine Mark.
b) der Leipziger, oder 18 Guldenfuß, 1690 zu Leipzig, die feine Mark Silber zu 12 Reichsthaler oder 18 fl. Dieser Fuß wurde 1738 zum allgemeinen Reichsfuße angenommen, ist aber nur von Braunschweig und Hannover noch beibehalten.
c) der Graumannische, oder 21 Guldenfuß, 1750 von Preußen angenommen und 1764 erneuert. Die feine Mark Silber auf 14 Reichsthaler oder 21 fl.
d) der Conventions- oder 20 Guldenfuß, die feine Mark zu $13\frac{1}{3}$ Thaler oder 20 Gulden, nach diesem Fuße werden dermalen in den östreichischen, bayerischen, sächsischen und anderen deutschen Staaten die Silbermünzen geprägt, aber nur in östreichischen und sächsischen Landen cursiren sie nach eben diesem Fuße; in den übrigen deutschen Ländern cursiren solche nach
e) dem 24 Guldenfuß, nemlich die feine Mark Silber zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden, oder 10 Conventionsthaler.

II) Bayerische Geldrechnung in gewöhnlicher oder weißer Münze.

Hiebei ist:

1 Guld. = 15 Batz. = 20 Gr. = 60 Kr. = 240 Pfen. = 480 Heller.
1 „ = 1 1/3 „ = 4 „ = 16 „ = 32 „
1 „ = 3 „ = 12 „ = 24 „
1 „ = 4 „ = 8 „
1 „ = 2 „

III) Bayerische Geldrechnung in schwarzer Münze.

Hiebei ist:

1 ℔ Pfennige = 8 Schilling = 240 Pfennige = 480 Heller und 1 Heller beträgt 1 1/7 Heller an weißer Münze.

IV) Bayerische Münzen.

Namen der Münzen.	Stück auf eine rauhe Mark	Stück auf die feine Mark	Schrot an holländ. Asen Troygew.	Korn an hol. Asen Troygew.	gewöhnlicher Currentwerth.		Werth nach dem 24 fl. Fuß.	
A) im Golde.					fl.	kr.	fl.	kr.
Ducaten	67	67 67/71	72,69	71,68	5	20		
Carolin	24	31 5/23	202,92	156,41	11	24		
Marb'or . . .	36	46 26/31	135,28	102,30	7	20		

B) in Silber nach dem Conventionsfuße.	Stück auf eine rauhe Mark	Stück auf eine feine Mark	Schrot ꝛc.	Korn ꝛc.	Werth nach dem 24 fl. Fuß.		dermal Currentwerth	
					fl.	kr.	fl.	kr.
Kronenthaler .	7 11/12	9 15/18	615,157..	536,356...	2	38 3/5	2	42
Ganze Conv.Thl.	8 1/3	10	584,4	487	—	—	2	24
Halbe Conv.Thl.	16 2/3	20	292,2	243,5	—	—	1	12
20 Kr. Stücke .	35	60	139,14	81,166	—	—	—	24
10 Kr. Stücke .	60	120	81,166	40,583	—	—	—	12

C) Außer diesen werden noch in Silber Sechskreuzer-, Groschen- und Kreuzerstücke und in Kupfer Pfennige und Heller gepräget.

II.

Tabellen, daraus das Verhältniß verschiedener Maaße, Gewichte und Münzen zu ersehen ist.

A.

Verhältnisse verschiedener Fuß- und Ellenmaaße nach dem Pariser Fuß zu 144 Duodez. Linien.

Namen der Länder und Oerter.	1 Fuß hält Par. Linien	Logarithmus	1 Elle hält Pariser Linien	Logarithmus
Amsterdam.	125,5	2,0986437	306,0	2,4857214
	125,48	2,0985745	305,39	2,4848548
Anspach . . .	132,92	2,1235903	276,78	2,4421347
			gr. 270,2	2,4316853
Augsburg.	131,3	2,1182647	gr. 268,8	2,4294293
	131,29	2,1182316	kl. 262,6	2,4192947
			kl. 260,	2,4149733
Bayern . . .	129,38	2,1118671	369,272	2,5673463
Berlin und in Preußen überh.	139,13	2,1434208	296,	2,4712917
Breslau . . .	127,65	2,1060208	255,3	2,4070508
Brüssel . . .	. . .	. . . .	gr. 307,8	2,4882686
			kl. 303,4	2,4820156
Dänemark . .	139,13	2,1434208	278,26	2,4444508
Dresden . . .	125,5	2,0986437	150,9	2,3995007
			gr. 506,9	2,7049223
England . . .	135,158	2,1308419	kl. 405,5	2,6079909
Eichstädt . . .	134,784	2,1296385	342,6	2,5347874
Frankfurt a M.	127	2,1038037	239,2	2,3787612
Frankreich.				
Par. Fuß . . .	144	2,1583625	526,8	2,7216458
neues Maß, Mêtre	443,296	2,6466938	527,04	2,7218436
Griechenland	135,8	2,1328998,	nach Auzout	de la Lande
alter Fuß . .	136,56	2,1353235,	nach le Roy	Astron. §. 2639.
Hamburg . .	127	2,1038037	254,	2,4048337
Leipzig, Baufuß	125,3	2,0979511	250,6	2,3989811
gemeiner Fuß .	125,1	2,0972573	250,58	2,3989464

Namen der Länder und Oerter.	1 Fuß hält Par. Linien	Logarithmus	1 Fuß hält Pariser Linien	Logarithmus
Mannheim .	128,65	2,1094098	247,3	2,3932241
	128,48	2,1088355	246,77	2,3922924
Nürnberg . .	134,88	2,1299476	291,08	2,4640124
	134,784	2,1296385	291,752	2,4650136
Regensburg	139	2,1430148	359,083	2,5551948
Rheinländischer Fuß	139,13	2,1434208	nach Eisenschmid de Pond. et Mens.	
	139,183	2,1435862	nach Lulofs de la Lande Astron.	
Rom, alter Fuß	130,9	2,1169396	Mem. de l'ac. de Paris an 1757.	
neuer Palmo	99,03	1,9957668	nach Boscowich.	
Rußland . . .	238,6	2,3776704	315,4	2,4988617
			in Seide 355,	2,5502284
			in Leinw. 445,8	2,6491401
Schweden . .	131,6	2,1192559	263,2	2,4202859
Tyrol	148,11	2,1705844	356,47	2,5520230
Wien und ganz Oestreich .	140,13	2,1465311	345,42	2,5383475
Würzburg . .	129,522	2,1123435	257,3	2,4104398

Anmerkung. Die vorkommenden zweierlei Angaben stützen sich auf verschiedene Quellen, und sind solche in dem, am Anfange dieses Anhangs bemerkten, Lehrbuche zu ersehen.

B.

Reductionstabelle der in verschiedenen Ländern gewöhnlichen Ruthen auf den königl. Pariser Fuß.

Namen der Länder.	1 Ruthe hält an: landesüblichem Fußmaaße.	1 Ruthe hält an: Pariser Duodecimallinien.	Logarithmus.
Anspach, Ruthe .	12 F.	1595,	3,2027607
Augsburg, . .	10	(1313,	3,1182647
		(1312,9	3,1182316
Bayern, . . .	10	(1293,8	3,1118671
		(1293,83	3,1118772

Namen der Länder.	1 Ruthe hält an		Logarithmus.
	landesüblichem Fußmaaße.	Pariser Duodecimallinien.	
Brandenburg, .	12	1269,56	3,2226021
England, (Rod.)	16,5	2230,107	3,3483257
Frankreich			
alter kön. Fuß, .	1	144,	2,1583625
. . Toise . . .	6	864,	2,9365137
kleine Perche . .	18	2592,	3,4136350
mittlere = = . .	20	2880,	3,4593925
große = = . .	22	2168,	3,5007852
neues Maaß, Mètre	—	443,296	2,6466938
Leipzig, Ruthe .	$15\frac{1}{6}$ Bauf.	1900,4	3,2788450
Nürnberg, . . .	16	(2155,2	3,3334876
		(2156,544	3,3337584
Rheinländische,	12	(1669,56	3,2226021
		(1670,196	3,2227675
Schweden, . .	16	2105,6	3,3233759
Wien, Klafter . .	6	840,78	2,9246824
Würtemberg, Rthe.	16	(2044,8	3,3106508
		(2028,8	3,3072392

C.

Verhältnisse verschiedener Meilen zur geographischen, nach Klügel, von 3811,6 Toisen.

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geographischen Meilen	Jede Meile hält Pariser Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad	Verhältniß der Quadratmeile, die geograph. 1000 gesetzt.
Arabische . . .	26,470	6053,5	56,67	14273
Bayer. Chaussee- .	99,812	22826,6	15,028	1003,7
Böhmische . . .	93,052	21270,0	16,12	1155
Dänische . . .	101,430	23197,2	14,79	972
Deutsche, alte . .	59,860	13722,1	25,	2778
neue kleine	84,527	19330,9	17,74	1399
Geograph. nach Klügel	100,	22869,6	15,	1000
nach der neuen franz. Vermessung . .	99,7105	22803,29	15,0436	1005,8

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geographischen Meilen	Jede Meile hält Pariser Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß der Quadratmeile, die geograph. 1000 gesetzt.
Französische, alte Leuka .	29,762	6806,43	50,5	11334
neue Lieues, $\frac{1}{25}$ Gr.	59,826	13681,97	25,0727	2794
neue Seemeilen, $\frac{1}{15}$ Gr.	74,7825	17102,47	20,0582	1788
neue v. $\frac{1}{100}$ Centesimalgrad . . .	67,304	15392,22	22,286	2208
Großbrittan., alte	31,512	7206,75	47,60	10070
neue zu 1760 Yards	21,702	4963,23	69,12	21234
Seemeilen . . .	24,999	5717,13	60,	16000
Leagues . . .	73,729	17150,4	20,	1778
Holländische . .	78,948	18055,12	19,	1604
Italienische . .	24,992	5717,13	60,	16000
Jüdische alte, Sabatherweg zu 200 jüd. biblischen Ellen . . .	14,881	3403,22	100,8	45158
Londner. v. $1666\frac{2}{3}$ Yards. . . .	20,549	4699,39	73,	23684
Nürnbergische .	114,110	26186,5	13,1	762,7
Oestr. Postmeilen .	102,123	23355,	14,69	959
Preußische . . .	104,390	23873,76	14,37	918
Portugiesische .	83,332	19057,44	18,	1440
Römische zu 8 olymp. Stad. . .	19,864	4543,75	75,5	25334
Rußische Meilen . oder Werste . .	14,378	3288,2	104,3	48349
Sächs. Polizeim. .	122,05	27912,	12,29	671
Schwäbische . .	124,94	28587,	12,	640
Schwedische . .	144,09	32953,5	10,41	480
Schweizerische .	112,52	25795,25	13,3	786
Spanische . . .	56,329	12882,	26,63	3152
Stadien griechisch. olymp.	2,498	571,23	600,	1600000
Türkische gewöhnliche oder Berri . .	22,497	5144,94	66,67	19755
Seemeilen . . .	17,662	4039,21	86,4	33178
Ungarische . .	112,53	25734,35	13,33	790

D.

Reductionstabelle verschiedener Flächenmaaße auf den königl. Pariser Quadratfuß.

Flächenmaaß verschiedener Oerter.	Hält an landesüblichen Quadrat-Ruthen	Hält an Pariser Quadrat-fußen	Logarithmus.
Anspach, Morgen .	360 □ R.	43560,	4,6390879
Augsburg, Stadt-		(41569,46	4,6187744
u. Hochstift, Tagw.	500 . .	(41563,13	4,6187082
Bayern, Tagw. .	400 . .	32291,	4,5090692
Brandenburg,			
Magdeb. kl. Morg. .	180 . .	24196,45	4,3837517
England, Acker			
(acre)	160 □ Rod	38374,81	4,5840464
Frankreich, alter kl.	100 kl. □		
Arpent	Perches	32400,	4,5105450
alter mittlerer	100 mittl.		
Arpent	□ Perch.	40000,	4,6020600
alter großer	100 große		
Arpent	□ Perch.	48400,	4,6848454
neues Flächen-	100 □		
maaß (Are)	Mètres	947,682	2,9766626
Nürnberg, Feld-,			
Wald-Morgen	200 □	(44800,23	4,6512802
oder Tagwerk	Ruthen	(44856,13	4,6518218
Rheinländischer		(16131,	4,2076604
Morgen	120 . .	(16143,26	4,2079912
		(21507,96	4,3325992
Waldmorgen	160 . .	(21524,34	4,3329300
		(8065,5	3,9066313
Juchart	60 . .	(8071,63	3,9069612
Sachsen, Morgen	150 Leipz.	26125,	4,4170563
Acker = 2 Morgen	300 . . .	52250,	4,7180363
Wien u. ganz Oest-	1600 □		
reich, Joch.	Klafter	54545,6	4,7367598
Würtemberg, Ju-	225 □	(45369,	4,6567591
chart oder Tagwerk	Ruthen	(44661,8	4,6199359
		(30246,	4,4806679
Morgen . .	150 . . .	(29774,5	4,4738474

E.

Größe verschiedener Getränkmaaße in französischen Duodezimal = Cubikzollen.

Maaße verschiedener Oerter.	Französische Duodezimal= Cubik = Zoll.	Logarithmus.
Anspach, Eymer zu 66 Maß	4511,	3,0542728
Maß	68,348	1,8347258
Augsburg, Schenk = oder Weinumgeldmaß vom Jahre 1538	52,863	1,7231514
Schenkeymer zu 72 Maß .	3806,136	3,5804847
Visirmaß	59,3462	1,7733330
Visireymer zu 64 Maß .	9798,1568	3,5795730
Bayern, Maß	53,8923	1,7315267
Schenkeymer zu 60 Maß .	3233,538	3,5096771
Visireymer zu 64 Maß .	3449,1072	2,5377067
Berlin, Quart	59,	1,7708520
Weineymer zu 64 Quart .	3776,	3,5770320
Bieröhmchen zu 24 Quart	1416,	3,1510633
Eichstädt, Weineymer zu 64 Weinmaß	3546,3	3,5497755
Biereymer zu 64 Biermaß	3878,6	3,5886750
Frankreich, ehemalige Pinte	48,	1,6812412
Neues Maß Litre-Decimètre cube	50,412416	1,7025374
Mannheim, Maß . . .	86,228	1,9356383
Ohm zu 48 Maß . . .	4138,944	3,6168896
Fuder zu 10 Ohm . . .	41389,44	4,6168896
Nürnberg, die Maß . .	54,372	1,7353753
der Eymer zu 64 Maß .	3479,808	3,5415553
Regensburg, Köpfel . .	42,	1,6232493
Weineymer großer zu 88 Köpfel	3696,	3,5677320
Bergeymer zu 68 Köpfel .	2856,	3,4557582
Biereymer zu 64 Köpfel .	2688,	3,4294293
Salzburg, Viertl . . .	79,2055	1,8987554
Eymer zu 40 Viertl . .	3168,22	5,5008154
Wien und ganz Oestreich, Eymer zu 40 Maß . . .	2853,56	3,4553875
Würzburg, Eymer zu 64 Maß	3783,0144	3,5778380

F.

Größe verschiedener Getreidmaaße in französischen Duodezimal-Cubikzollen.

Maaße verschiedener Oerter.	Französische Duodez. Cubik-Zoll.	Logarithmus.
Anspach, Kornmetzen zu 16 Maß	1065,12	3,0273986
Kornsimmer zu 16 Metz . .	17041,92	4,2314975
Habermetzen zu 18 Maß . .	983,268	2,9926719
Habersimmer zu 32 Metz .	31464,576	4,4978219
Augsburg, Metzen zu 4 Viertling	1351,291	3,1307489
Schäffel zu 8 Metzen . . .	10810,325	4,0338389
für alle Getreidsorten.		
Bayern, für alle Ge-) Metzen	1868,266	3,2714388
treidsorten, au-)		
ßer dem Haber) Schäffel	11209,598	4,0495901
Habermaaß)Metzen	2179,644	3,3383856
) Schäffel.	13077,864	4,1165369
Berlin, Schäffel zu 16 Metzen	2758,952	3,4407442
für alle Getreidsorten.		
Eichstädt, für alle Sorten, Metzen	1875,	3,2730013
bei Weitzen und Korn		
1 Muth = 2 Schäffel = 32		
Metzen	60000,	4,7781513
bei Gersten und Dünkel 1 Muth		
= 28 Metzen.	71250,	4,8527849
Habermuth = 46 Metzen. .	86250,	4,9357591
Frankreich, altes Muid =		
12 Setiers = 144 Boisseaux	92160,	4,9645425
neues allgem. franz. Körper-		
maaß ist das Litre = Mêtre		
cub.	50,412416	1,7025374
Décalitre = 10 litres . .	504,12416	2,7025374
Decilitre = 0,1 litres. . .	5,0412416	0,7025374
Mannheim, Simmer zu 3 Immer	769,	2,8859203
Malter zu 8 Simmer . . .	6152,	3,7890163
für alle Getreidsorten.		
Nürnberg, Kornsimra = 16		
Metzen	16336,061	4,2131470
Habersimra = 32 Metzen. .	30388,48	4,4827089
Regensburg, Metzen . . .	945,81	2,9758038
Schaf zu 32 Metzen. . . .	30265,92	4,4809538

Maaße verschiedener Oerter.	Französische Duodez. Cubik-Zoll.	Logarithmus.
Wien, und in den östreichischen Ländern,		
Metzen zu 8 Achtel	3100,54	3,4914373
Muth zu 30 Metzen . . .	93016,2	4,9685580
für alle Getreidarten.		
Würzburg, Stadt-Korn-Metz.	1094,487	3,0392107
Korn-Malter = 8 Metzen .		
Habermetzen	1090,18	3,2279329
Haber-Malter = 12 Metzen.		
Würtenberg, in den ältern Landen für alle Getreidsorten,		
Simri = 4 Metz. = $\frac{1}{8}$ Schäffel.	1124,45	3,0509402

G.

Bestimmuug verschiedener Gewichte nach holländischen Asen Troygewichtes.

Namen der Länder und Oerter.	Holl. Asen Troygew.	Logarithmus.
Amsterdam, ℔ Handelsgew.	10280,	4,0119931
℔ Troygew. zu 16 Unzen	10240,	4,0103000
℔ Apothekergew. zu 12 Unzen	7680,	3,8853612
Münzgew. Mark zu 8 Unzen	5120,	3,7092700
Augsburg, ℔ Frohn- oder (	10220,	4,0094509
Schwergewicht (	10214,	4,0091959
(	9836,	3,9928185
℔ Kramer- od. Leichtgew. (	9830,5	3,9925756
(	4912,	3,6912584
Mark Münzgew. zu 8 Unzen (	4909,12	3,6910037
Bayern, ℔ Handelsgewicht	11655,168	4,0665284
℔ altes Apothekergewicht	7443,9	3,8718005
℔ neues „ „	7492,608	3,8746330
Mark Münzgew. oder Cöllner Mark	4870,	3,6875290
℔ oder 2 Mark Silbergewicht	11682,	4,0675172
Bayreuth, ℔ Handelsgew.	10608,	4,0256335

Namen der Länder und Oerter.	Holl. Asen Troygew.	Logarithmus.
Berlin und in den preußischen Staaten, ℔ Handelsg.	9747,	3,9888710
℔ Apothekergew. . . .	7438,	3,8714562
Mark Münzgew. . . .	4864,	3,6869936
England, ℔ Königsgewicht	14162,	4,1511246
℔ Avoir du poids . .	9441,	3,9750180
℔ Troygew. zu 12 Unzen	7766,	3,8901974
Eichstädt, ℔ Handelsgew.	10610,	4,0257154
Frankfurt am Main,		
℔ Centnergewicht . . .	10595,	4,0251010
℔ Handelsgewicht . . .	9720,	3,9876663
Frankreich, altes ℔ Poids	(10188,	4,0080889
de Marc	(10183,	4,0078757
altes Münzgew. Mark .	5094,	3,7070589
neues Gew. Gramme .	20,8128	1,3183305
Décigramme = 0,1 Gram.	2,08128	0,3183305
Décagramme = 10 Gram.	208,128	2,3183305
Hamburg, ℔ Handelsgew.	10080,	4,0034605
Leipzig, ℔ Handelsgew. .	9716,	3,9874875
Nürnberg, ℔ Handelsgew.	10610,	4,0257154
Mark Münzgew. . . .	5118,	3,7091003
Salzburg, ℔ Handelsgew.	11655,43	4,0665284
Tyrol, ℔ Handelsgewicht	11716,	4,0687794
Wien, ℔ Handelsgewicht .	11655,43	4,0665284
℔ Apothekergew. zu 12 Unzen	8741,57	3,9415894
Mark Münzgew. = $\frac{6}{5}$ Cöllner Mark	5841,	3,7664872

Anmerkungen:

1tens, Das Troygewicht bekam den Namen von der Stadt Troyes in Champagne, wo ehedem sehr ansehnliche Jahrmärkte gehalten wurden, die Mark war anfänglich in Frankreich und Holland gleich; das holl. Troygewicht wird seit langer Zeit als Maaßstab zur Vergleichung anderer Gewichte gebraucht.

2tens, Bei dem holländischen Troygewichte ist 1 Mark =
8 Unzen = 160 Engel = 640 Vierling = 1280 Troisken = 2560 Deursken = 5120 Aß
1 „ = 20 „ = 80 „ = 320 „ = 640 „ = 1280 „ = 2560 „
1 „ = 4 „ = 16 „ = 32 „ = 64 „ = 128 „
1 „ = 2 „ = 4 „ = 8 „ = 16 „
1 „ = 2 „ = 4 „ = 8 „
1 „ = 2 „ = 4 „
1 „ = 2 „
1 „

3tens, Bei dem französischen Troygewichte, Poids de Marc, ist 1 Marc =
8 Onces = 64 Gros = 192 Deniers = 4608 Grains = 110592 Primes ou Carobes
1 „ = 8 „ = 24 „ = 576 „ = 13824 „
1 „ = 3 „ = 72 „ = 1728 „
1 „ = 24 „ = 576 „
1 „ = 24 „
1 „

und es enthielt das ehemalige franz. bürgerliche Handelsgewicht, wobei 1 Livre = 2 Marcs, die nehmliche Eintheilung.

4tens Von dem neuen französischen Maaße und Gewichte ist zu bemerken:

a) Den neuesten Vermessungen gemäß hält ein Quadrant eines Mittagkreises 30784440 Pariser Fuß, folglich der 100te Theil, oder Centesimalgrad 307844,4 Pariser Fuß.

b) Als allgemeines Längenmaaß ist der 0,00001 Centesimalgrad angenommen, und heißt Mètre; das Mètre hält also 3,078444 Pariser Fuß; um größere Längen zu bestimmen, dienen der Décamètre = 10 mètres, der Hectomètre = 100 mètres und der Kilomètre = 1000 mètres, und zu kleinen Längenbestimmungen dienen als Maaß der Décimètre = 0,1 mètre, der Centimètre = 0,01 mètre, u. s. w.

c) Hundert Quadrat-Mêtres geben das allgemeine Flächenmaaß, welches Are heißt, aus welchen wieder für sich einleuchtet, was Décare, Hectare, und ebenso Déciare, Centiare in Rücksicht von Are sagen wollen.

d) Der Cubus vom Décimètre, oder, 0,001 cubische Mètres bestimmt das Frucht- oder Körpermaaß Litre.

e) Der Cubus eines Mètre = 29,173852 Pariser Cubikfuß ist das neue französische Holzmaaß, und heißt Stère.

f) Nach den neuesten Versuchen wog ein Cubik-mètre destillirten Wassers im luftleeren Raume bei seiner größten Dichtigkeit, 2042 Livres, 14 Onc, 14 Grain. Nach Hrn. Zachs geogr. Ephemeriden ist der größte Grad von Dichtigkeit vom Wasser bei dem 3, 2ten Grade des Queckfilbertherm. nach reaumürischer Scale.

g) Dieses Gewicht eines Cubik-mètre destillirten Wassers heißt Bar, und das Gewicht eines Cubik-céntimètre heißt Gramme, welches also 18,82715 Grans hält, und als Maaß aller Gewichte angenommen wird.

H.

Verhältniß verschiedener Rechnungsmünzen.

Rechnungs-Münzen verschiedener Länder.	Innerer Gehalt in holl. Asen Troygew.		Werth in 24 Guldenfuß.			
	in Gold	in Silber	fl.	kr.	pf.	Hu.
Bayern, u. im Reiche, nach dem 24 fl. Fuß, Gulden	14,8	202,66	1	—	—	—
Reichsthaler . . .	22,2	304,	1	30	—	—
Oestreich, nach dem Convent.-Fuß, Kaisergulden	17,29	243,2	1	12	—	—
Sachsen, Reichsthal. nach dem Convent.-Fuß zu 24 Groschen . . .	25,50	364,8	1	48	—	—
Preußen, Thaler nach dem 21 fl. Fuß . .	24,	347,43	1	42	3	1
Gulden = $\frac{1}{3}$ Thaler	8,	115,81	—	34	1	$\frac{1}{3}$
England, Pf. Sterl. Schilling oder 240 Pence	149,	2286,5	11	17	—	—
Frankreich, 1 Livre zu 20 Sous tournois oder			—	27	2	—
240 Deniers . . .	5,79	91,3	—	27	—	—
Neue Münze, Franc	—	93,6576	—	27	3	—
Portugall, Millerées = 1000 Rées . .	42,75	563,52	2	46	3	$\frac{1}{2}$
Rußland, Rubel zu 100 Kopeken . . .	27,95	374,15	1	50	3	—
Spanien, Real od. Réal de Vellon = 34 Maravedis	1,6	25,	—	7	1	$1\frac{16}{16}$
Piastre (peso duro) = 20 Réal	32,	500,	2	28	—	—
Pistole (Doublon) = 80 Réal	128,	2000,	9	52	—	—
Réal, Piastre und Pistole sind zugleich reelle Münzen.						

Rechnungs = Münzen verschiedener Länder.	Innerer Gehalt in holl. Asen Troygew.		Werth in 24 Guldenfuß.			
	in Gold	in Silber	fl.	kr.	pf.	Hll.
Türkey, Piastre = 40 Paras = 100 gute Asper = 120 Curant-Asper	—	185,3	—	54	3	1
Beutel, (Keser), = 500 Piastre.						
Beutel Gold, (Kitze) = 30000 Piastre.						

I.

Verwandlung der sächsischen Geldrechnung in die bayerische, und umgekehrt.

Sächsisch Geld	beträgt nach bayer. Geld.			
	fl.	kr.	pf.	Hll.
1 Pfennig . .	—	—	1	1
2 „ . .	—	—	3	—
3 „ . .	—	1	—	1
4 „ . .	—	1	2	—
1 Groschen .	—	4	2	—
2 „ . .	—	9	—	—
12 „ = ½ Th.	—	54	—	—
24 „ = 1 Th.	1.	48	—	—

Bayerisches Geld.	beträgt nach sächsisch. Geld		
	Th.	Gr.	pf.
1 kr.	—	—	$2\frac{2}{3}$
2 „	—	—	$5\frac{1}{3}$
3 „	—	—	8
12 „	—	2	8
24 „	—	5	4
30 „ = ½ fl. .	—	6	8
60 „ = 1 fl. .	—	13	4
90 „ = Th. .	—	20	—
1 Spec. Th. .	1	8	—

K.

Verwandlung der preußischen Geldrechnung in die bayerische, und umgekehrt.

Preuß. Geld.	Beträgt nach bayer. Gelde			
	fl.	kr.	pf.	Hll
1 Pfennig . .	—	—	1	1
2 „ . .	—	—	3	—
12 „ = 1 Gr.	—	4	1	$\frac{1}{4}$
12 Gr. = ½ Thl	—	51	1	$\frac{1}{2}$
24 „ = 1 „	1	42	3	1

Bayer. Geld.	Beträgt im preuß. Gelde.	
	Gr.	pf.
1 Pfennig . . .	—	$\frac{2}{3}$
1 Kr.	—	$2\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{0}{7}$
12 „	2	$10\frac{1}{2}$
24 „	5	1
60 „ = 1 fl. .	13	1

L.

Verhältniß des bayerischen und östreichischen Geldes.

Da man in bayerischen sowohl, als östreichischen Ländern nach Gulden, Groschen, Kreuzer, und zwar nach der nämlichen Unterabtheilung rechnet, nur mit dem Unterschiede, daß in Bayern der 24 Gulden- in Oestreich aber der 20 Guldenfuß gilt, so ist

bayer. Geld : östreich. Geld = 20 : 24 = 5 : 6

mithin z. B. 6 bayer. Gulden = 5 östreich. Gulden.

M.

Die außer den bayer. gewöhnlichsten Goldmünzen.

Namen der Münzen.	Stück auf					
Französische alte Schild-louisd'or . .	28,6	$31\frac{37}{65}$	170,28	153,73	11	—
neue, seit 1786	30	$53\frac{3}{13}$	162,5	146,70	10	30
Oestreichische Souveraind'or	$21\frac{67}{117}$	$21\frac{6089}{22533}$	234,62	215,07	16	—

Anmerkung: Kaiserliche, Kremnitzer, Holländer, Salzburger, und alle vollgewichtige Reichsducaten sind an Werth den baierischen gleich; die päbstlichen Ducaten aber gelten nur gewöhnlich 5 fl. 8 kr. und ein Florentiner Ducaten 5 fl. 14 kr.

III.

Bemerkungen zu verschiedenen anderen Reductionen.

1tens, Das Getränkmaaß hat an einigen Orten die Eintheilung, daß

1 Fuder = 6 Ohm = 12 Eymer = 720 Maß

1 „ = 2 „ = 120 „

1 „ = 60 „

und 1 Maß = 2 halbe Maß = 4 Quartel oder
oder Seidel Schoppen

ist.

2tens, Das Kalchmaß; hievon ist in Bayern
1 Muth = 4 Schäffel = 24 gewöhnl. Metzen.

3tens, Ein Kreiß oder Zirkel hält in Bayern
360 Grad = 21600 Minuten = 1296000 Sekunden
1 „ = 60 „ = 3600 „
1 „ = 60 „

4tens, Ein Jahr hält 365, ein Schaltjahr 366 Tage.
1 Jahr hält auch 12 Monate,
1 Monat 30 Tage
1 Tag 24 Stunden
1 Stunde 60 Minuten
1 Minute 60 Secunden
1 Secunde 60 Terzen,
1 Jahr wird auch in 52 Wochen und
1 Woche in 7 Tage abgetheilt
1 Jahr hat 4 Quartale oder Quatember, und
1 Quartal ist = 13 Wochen.

5tens, Von den Würfen oder Schüssen bei Zahlungen.

a) Ein Wurf Kreuzer hält 5 Stück; 5 Würfe geben 1 fl.

b) Ein Wurf Groschen hält 5 Stück, also 15 kr., 4 Würfe geben 1 fl.

c) Ein Wurf Sechser hält 5 Stück, also 30 kr., 2 Würfe machen 1 fl.

d) Ein Wurf Zwölfer hält 5 Stück, mithin 1 fl.

e) Ein Wurf Vierundzwanziger hält 5 Stück, und macht 2 fl.

f) Ein Wurf bayerische Thaler hält 5 Stück und macht 12 fl.

g) 4 Kronthaler betragen . . . 10 fl. 48 kr.
5 „ „ . . . 13 „ 30 kr.
10 „ „ . . . 27 „ — „
20 „ „ . . . 54 „ — „
40 „ „ . . . 108 „ — „

6tens, Besondere zählbare Dinge und Benennungen.

1 Schock hält 60 Stücke.
1 Schilling „ 30 „
1 Mandel „ 15 „
1 Dutzend „ 12 „
1 Stiege „ 10 „
1 Paar „ 2 „
1 Schober „ 60 Garben, Bund oder Schaub.
1 Karte Seide 2 Pfund
1 Saum „ 22 Stück Tuch
1 Ballen „ 12 „ „
1 Stück Tuch 30 Ellen
1 Tonne Goldes 100000 fl.
1 Ballen Juchten hat 20 Rollen
1 Rolle „ „ 6 Häute.
5 Pfund Drath machen 1 Ring
20 Ringe „ „ 1 Zentner.
1 Tonne hat 20 Zentner) Schiffsgewicht.
1 Last „ 2 Tonnen)
1 Faust, bei Bestimmung der Höhe der Pferde hat 4 Zoll.

Tabelle der zusammengesetzten Zahlen und ihrer kleinsten Factoren, von 1 bis 1000.

(zu 1tem Zus. des §. 39.)

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
4	2.2	54	2.3.3.3	99	3.3.11
6	2.3	55	5.11	100	2.2.5.5
8	2 2.2	56	2.2.2.7	102	2.3.17
9	3.3	57	3.19	104	2.2.2.13
10	2.5	58	2.29	105	3.5.7
12	2.2.3	60	2.2.3.5	106	2.53
14	2.7	62	2.31	108	2.2 3.3.3
15	3.5	63	3.3.7	110	2.5.11
16	2.2.2.2	64	2.2.2.2.2.2	111	3.37
18	2.3.3	65	5.13	112	2.2.2.2.7
20	2.2.5	66	2 3.11	114	2.3.19
21	3 7	68	2.2.17	115	5.23
22	2.11	69	3.23	116	2.2.29
24	2 2.2.3	70	2.5.7	117	3.3.13
25	5.5	72	2.2.2.3.3	118	2.59
26	2.13	74	2.37	119	7.17
27	3.3.3	75	3.5.5	120	2.2.2.3.5
28	2.2.7	76	2.2.19	121	11.11
30	2.3.5	77	7.11	122	2.61
32	2.2.2.2.2	78	2.3.13	123	3.41
33	3,11	80	2.2 2.2.5	124	2.2.31
34	2.17	81	3.3.3 3	125	5.5.5
35	5.7	82	2.41	126	2.3 3.7
36	2.2.3.3	84	2.2.3.7	128	2.2.2.2.2.2.2
38	2.19	85	5.17	129	3.43
39	3 13	86	2.43	130	2.5.13
40	2.2.2.5	87	3.29	132	2.2.3.11
42	2.3.7	88	2.2.2.11	133	7.19
44	2.2.11	90	2.3.3.5	134	2 67
45	3.3.5	91	7.13	135	3.3.3.5
46	2.23	92	2.2.23	136	2.2.2.17
48	2.2.2.2.3	93	3.31	138	2.3.2.3
49	7.9	94	2.47	140	2.2.5.7
50	2.5.5	95	5.19	141	3.47
51	3 17	96	2.2.2.2.2.3	142	2.71
52	2.2.13	98	2.7.7	143	11.13

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
144	2.2.2.2.3.3	192	2.2.2.2.2.2.3	240	2.2.2.2.3.5
145	5.29	164	2.97	242	2.11.11
146	2.73	195	3.5.13	243	3.3.3.3.3
147	3.7.7	196	2.2.7.7	244	2.2.61
148	2.2.37	198	2.3.3.11	245	5.7.7
150	2.3.5 5	200	2.2.2.5.5	246	2.3.41
152	2.2.2.19	201	3.67	247	13.19
153	3.3.17	202	2.101	248	2.2.2.31
154	2.7.11	203	7.29	249	3.8.3
135	5.31	204	2.2.3.17	250	2.5.5.5
156	2.2.3.13	205	5.41	252	2.2.3.3.7
158	2.79	206	2.103	253	11.23
159	3.53	207	3.3.23	254	2.127
160	2.2.2.2.2.5	208	2.2.2.2.13	255	3.5.17
161	7.23	209	11.19	256	2.2.2.2.2.2.2.2
162	2.3.3 3.3	210	2.3.5.7	258	2.3.43
164	2.2.41	212	2.2.53	250	7.37
165	3.5.11	213	3.71	260	2.2.5.13
166	2.83	214	2.107	261	3.3.29
168	2.2.2.3.7	215	5.43	262	2.131
169	13.13	216	2.2.2.3.3.3	264	2.2.2.3.11
170	2.5.17	217	7.31	265	5.53
171	3.3.19	218	2.109	266	2.7.19
172	2.2.43	219	3.73	267	3.89
174	2.3.29	220	2.2.5.11	268	2.2.67
175	5.5.7	221	13.17	270	2.3.3.3.5
176	2.2.2.2.11	222	2.3.37	272	2.2.2.2.17
177	3.59	224	2.2.2.2.2.7	273	3.7.13
178	2.89	225	3.3.5.5.	274	2.137
180	2.2.3.3.5	226	2.113	275	5.5.11
182	2.7.13	228	2.2.3.19	276	2.2.3.23
183	3.61	230	2.5.23	278	2.139
184	2.2.2.23	231	3.7.11	279	3.3.31
185	5.37	232	2.2.2.29	280	2.2.2.5.7
186	2.3.31	234	2.3.3.13	282	2.3,47
187	11.17	235	5.47	284	2.2.71
188	2.2.47	236	2.2.59	285	3.5.19
189	3.3.3.7.	237	3.79	286	2.11.13
190	2.5.19	238	2.7.17	287	7.41

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
288	2.2.2.2.2.3.3	333	3.3.37	380	2.2.5.19
289	17.17	334	2.167	381	3.127
290	2.5.29	335	5.67	382	2.191
291	3.97	336	2.2.2.2.3.7	384	2.2.2.2.2.2.2.3
292	2.2.73	338	2.13.13	385	5.7.11
294	2.3.7.7	339	3.113	386	2.193
295	5.59	340	2.2.5.17	387	3.3.43.
296	2.2.2.37	341	11.31	388	2.2.97
297	3.3.3.11	342	2.3.3.19	390	2.3.5.13
298	2.149	343	7.7.7	391	17.23
299	13.23	344	2.2.2.43	392	2.2.2.7,7
300	2.2.3.5.5	345	3.5.23	393	3.131
301	7.43	346	2.173	394	2.197
302	2.151	348	2.2.3.29	395	5.79
303	3.101	350	2.5.5.7	396	2.2.3.3.11
304	2.2.2.2.19	351	3.3.3.13	398	2.199
305	5.61	352	2.2.2.2.2.11	399	3.7.19
306	2.3.3.17	354	2.3.59	400	2.2.2.2.5.6
308	2.2.7.11	355	5.71	402	2.3.67
309	3.103	356	2.2.89.	403	13.31
310	2.5.31	357	3.7.17	404	2.2.101
312	2.2.2.3.13	358	2.179	405	3.3.3.3.5
314	2.157	360	2.2.2.3.3.5	406	2.7.29
315	3.3.5.7	361	19.19	407	11.37
316	2.2.79	362	2.181	408	2.2.2.3.17
318	2.3.5.3	363	3.11.11	410	2.5.41
319	11.29	364	2.2.7.13	411	3.137
320	2.2.2.2.2.2.5	365	5.73	412	2.2.103
321	3.107	366	2.3.61	413	7.59
322	2.7.23	368	2.2.2.2.23	414	2.3.3.2.3
323	17.19	369	3.3.41	415	5.83
324	2.2.3.3.3.3	370	2.5.37	416	2.2.2.2.2.13
325	5.5.13	371	7.53	417	3.139
326	2.163	372	2.2.3.31	418	2.11.19
327	3.109	374	2.11.17	420	2.2.3.5.7
328	2.2.2.41	375	3.5.5.5	422	2.211
329	7.47	376	2.2.2.47	423	3.131
330	2 3.5.11	377	13.29	424	2.2.2.5.3
332	2.2.8.3	378	2.3.3.3.7.	425	5.5.17

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
426	2.3.71	474	2.3.79	519	3.173
427	7.61	475	5.5.19	520	2.2.2.5.13
428	2.2.107	476	2.2.7.17	522	2.3.3.29
429	3.11.13	477	3.3.53	524	2.2.131
430	2.5.43	478	2.239	525	3.5.5.7
432	2.2.2.2.3.3.3	480	2.2.2.2.2.3.5	526	2.263
434	2.7.31	481	13.37	527	17.31
435	3.5.29	482	2.241	528	2.2.2.2.3.11
436	2.2.109	483	3.7.23	529	23.23
437	19.23	484	2.2.11.11	530	2.5.53
438	2.3.73	485	5.97	531	3.3.59
440	2.2.2.5.11	486	2.3.3.3.3.3	532	2.2.7.19
441	3.3.7.7	488	2.2.2.61	533	13.41
442	2.13.17	489	3.163	534	2.3.89
444	2.2.3.37	490	2.5.7.7	535	5.107
445	5.89	492	2.2.3.41	536	2.2.2.67
446	2.223	493	17.29	537	3.179
447	3.149	494	2.13.19	538	2.269
448	2.2.2.2.2.2.7	495	3.3.5.11	539	7.7.11
450	2.3.3.5.5	496	2.2.2.2.31	540	2.2.3.3.3.5
451	11.41	497	7.71	542	2.271
452	2.2.113	498	2.3.83	543	3.181
453	3.151	500	2.2.5.5.5	544	2.2.2.2.2.17
454	2.227	501	3.167	545	5.109
455	5.7.13	502	2.251	546	2.3.7.13
456	2.2.2.3.19	504	2.2.2.3.3.7	548	2.2.137
458	2.229	505	5.101	549	3.3.61
459	3.3 3.17	506	2.11.23	550	2.5.5.11
460	2.2.5.23	507	3.13.13	551	19.29
462	2.3.7.11	508	2.2.127	552	2.2.2.3.23
464	2.2.2.2.29	510	2.3.5.17	553	7.79
465	3.5.31	511	7.73	554	2.277
466	2.233	512	2 2.2.2.2.2.2.2.2.2	555	3.5.37
468	2.2.3.3.13	513	3 3.3.19	556	2.2 139
469	7.67	514	2.257	558	2.3.331
470	2.5.47	515	5.103	559	13.43
471	3.157	516	2.2.3.43	560	2.2.2.2.5.7
472	2.2.2.59	517	11.47	561	3.11.17
473	11.43	518	2.7.37	562	2.281

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
564	2.2.3.47	611	13.47	658	2.7.47.
565	5.113	612	2.2.3.3.17	660	2.2.3.5.11
566	2.283	614	2.307	662	2.331
567	3.3.3.3.7.	615	3.5.41	663	3.13.17
568	2.2.2.71	616	2.2.2.7.11	664	2.2.2.83
570	2.3.5.19	618	2.3.103	665	5.7.19
572	2.2.11.13	620	2.2.5.31	666	2.3.3.37
573	3.191	621	3.3.3.23	667	2.3.29
574	2.7.41	622	2.311	668	2.2.167
575	5.5.23	623	7.89	669	3.223
576	2.2.2.2.2.2.3.3	624	2.2.2.2.3.13	670	2.5.67
578	2.17.17	625	5.5.5.5.	671	11.61
579	3.193	626	3.313	672	2.2.2.2.2.3.7
580	2.2.5.29	627	3.11.19	674	2.337
581	7.83	628	2.2.157	675	3.3.3.55
582	2.3.97	629	17.37	676	2.2.13.13
583	11.53	630	2.3.3.5.7	678	2.3.113
584	2.2.2.73	632	2.2.2.79	679	7.97
585	3.3.5.13	633	3.211	680	2.2.2.5.17
586	2.293	634	2.317	681	3.227
588	2.2.3.7.7	635	5.127	682	2.11.31
589	19.31	636	2.2.3.53	684	2.2.3.3.19
590	2.5.59	637	7.7.13	685	5.137
591	3.197	638	2.11.29	686	2.7.7.7.
592	2.2.2.2.37	639	3.3.71	687	3.229
594	2.3.3.3.11	640	2.2.2.2.2.2.2.5	688	2.2.2.2.43
595	5.7.17	642	2.3.107	689	13.53.
596	2.2.149	644	2.2.7.23	690	2.3.5.23
597	3.199	645	3.5.43	692	2.2.173
598	2.13.23	646	2.17.19	693	3.3.7.11
600	2.2.3.5	648	2.2.2.3.3.3.3.	694	2,347
602	2.7.43	649	11.59	695	5.139
603	3.3.67	650	2.5.5.13	696	2.2.2.3.29
604	2.2.151.	651	3.7.31	697	17.41
605	5.11.11.	652	2.2.163	698	2.349
606	2.3.101	654	2.3.109	699	3.233
608	2.2.2.2 2.19	655	5.131	700	2.2.5.5.7
609	3.7.29	656	2.2.2.2.41	702	2.3.3.3.13
610	2.5.61	657	3.3.73	703	19.37

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
704	2.2.2.2.2.2.11	749	7.107	794	2.397
705	3.5.47	750	2.3.5.5.5.	795	3.5.53
706	2.353	752	2.2.2.2.47	796	2.2.199
707	7.101	753	3.251	798	2.3.7.19
708	2.2.3.59	754	2.13.29	799	17.47
710	2.5.71	755	5.151	800	2.2.2.2.2.5.5
711	3.3.79	756	2.2.3.3.3.7	801	3.3.89
712	2.2.2.89	758	2.379	802	2.401
713	23.31	759	3.11.23	803	11.73
714	2.2.7.17	760	2.2.2.5.19	804	2.2.3.67
715	5.11.13	762	2.3.127	805	5.7.23
716	2.2.179	763	7.109	806	2.13.31
717	3.239	764	2.2.91	807	3.269
718	2.359	765	3.3.5.17	808	2.2.2.101
720	2.2.2.2.3.3.5	766	2.383	810	2.3.3.3.3.5
721	7.103	767	13.59	812	2.2 7.29
722	2.19.19.	768	2.2.2.2.2.2.2.2.3	813	3.271
723	3.241	770	2.5.7.11.	814	2.11.37
724	2.2.181	771	3.257.	815	5.163
725	5.5.29	772	2.2.193	816	2.2.2.2.3.17
726	2.3.11.11	774	2.3.3.43	817	19.43
728	2.2.2.7.13	775	5.5.31	818	2.409
729	3.3.3.3.3.3.	776	2.2.2.97	819	3.3.7.13
730	2.5.73	777	3.7.37	820	2.2.5.41
731	17.43	778	2.389	822	2.3.137
732	2.2.3.61	779	19.41	824	2.2.2.103
734	2.367	780	2.2.3.5.13	825	3.5.5.11
735	3.5.7.7.	781	11.71	826	2.7.59
736	2.2.2.2.2.23	782	2.17.23	828	2.2.3.3.23
737	11.67	783	3.3,329	830	2.5.83
738	2.3.3.41	784	2.2.2.2.7.7	831	3.277
740	2.2.5.37	785	5.157	832	2.2.2.2.2.2.13
741	3.13.19	786	2.3.131	833	7.7.17
742	2.7.53	788	2.2.197	834	2.3.139
744	2.2.2.3.31	789	3.263	835	5.167
745	5.149	790	2.5.79	836	2.2.11.19
746	2.373	791	7.113	837	3.3.3.31
747	3.3.83	792	2.2.2.3.3.11	838	2.419
748	2.2.11,17	793	13.61	840	2.2.2.3.5.7

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
841	29.29	888	2.2.2.3.37	931	7.7.19
842	2.421	889	7.127	932	2.2.233
843	3.281	890	2.589	933	3.311
844	2.2.211	891	3.3.3.3.11	934	2.467
845	5.13.13	892	2.2.223	935	5.11.17
846	2.3.131	893	19.47	936	2.2.2.3.3.13
847	7.11.11	894	2.3.149	938	2.7.67
848	2.2.2.2.53	895	5.179	939	3.313
849	3.283	896	2.2.2.2.2.2.2.7	940	2.2.5.47
850	2.5.5.17	897	3,13.23	942	2.3.157
851	23.37	898	2.449	943	23.41
852	2.2.3.71	899	29.31	944	2.2.2.2.59
854	2.7.61	900	2.2.3.3.5.5	945	3.3.3.5.7
855	3.3.5.19	901	17.53	946	2.11.43
856	2.2.2.107	902	2.11.41	948	2.2.3.79
858	2.3.11.13	903	3.7.43	949	13.73
860	2.2.5.43	904	2.2.2.113	950	2.5.5.19
861	3.7.41	905	5.181	951	3.317
862	2.4.31	906	2.3.151	952	2.2.2.7.17
864	2.2.2.2.2.3.3.3	908	2.2.227	954	2.3.3.53
865	5.173	909	3.3.101	955	5.191
866	2.433	910	2.5.7.13	956	2.2.239
867	3.17.17	912	2.2.2.2.3.19	957	3.11.29
868	2.2.7.31	913	11.83	958	2.479
869	11.79	914	2.457	959	7.137
870	2.3.5.29	915	3.5.61	960	2.2.2.2.2.2.3.5
871	13.67	916	2.2.229	961	31.31
872	2.2.2.109	917	7.131	962	2.13.37
873	3.3.97	918	2.3.3.3.17	963	3.3.107
874	2.19.23	920	2.2.2.5.23	964	2.2.241
875	5.5.5.7	921	3.307	965	5.193
876	2.2.3.73	922	2.461	966	2.3.7.23
878	2.439	923	13.71	968	2.2.2.11.11
879	3.293	924	2.2.3.7.11	969	3.17.19
880	2.2.2.2.5.11	925	5.5.37	970	2.5.97
882	2.3.3.7.7	926	2.463	972	2.2.3.3.3.3.3
884	2.2.13.17	927	3.3.103	973	7.139
885	3.5.59	928	2.2.2.2.2.29	974	2.487
886	2.443	930	2.3.5.31	975	3.5.5.13

Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.	Zahl	Factoren.
976	2.2.2.2.61	985	5.197	993	3.331
978	2.3.163	986	2.17.29	994	2.7.71
979	11.89	987	3.7.47	995	5.199
980	2.2.5.7.7	988	2.2.13.19	996	2.2.3.83
981	3.3.109	989	23.43	998	2.499
982	2.491	990	2.3.3.5.11	999	3.3.3.37
984	2.2.2.3.41	992	2.2.2.2.2.31	1000	2.2.2.5.5.5

Arithmetische Progressions-Formeln.

(nach §. 159.)

Für	wenn gegeben sind	ist die Formel
ω	a, D, n	$\omega = a + (n-1)D$;
	a, S, n	$\omega = \frac{2S}{n} - a$;
	S, n, D	$\omega = \frac{S}{n} + \frac{D}{2}(n-1)$;
	S, a, D	$\omega = \sqrt{\left(a^2 + D(2S - a + \frac{D}{4})\right)} - \frac{D}{2}$;
S	a, n, ω	$S = \frac{n}{2}(a + \omega)$;
	a, D, n	$S = n\left(a + \frac{D}{2}(n-1)\right)$;
	n, D, ω	$S = n\left(\omega - \frac{D}{2}(n-1)\right)$;
	a, D, ω	$S = \left(\frac{\omega - a}{D} + 1\right)\frac{\omega + a}{2}$;

Für	wenn gegeben sind	ist die Formel
D	a, n, ω	$D = \frac{\omega - a}{n - 1}$;
	a, S, n	$D = \frac{2(S - an)}{n(n-1)}$;
	n, S, ω	$D = \frac{2(n\omega - S)}{n(n-1)}$;
	a, S, ω	$D = \frac{(\omega + a)(\omega - a)}{2S - (\omega + a)}$;
n	a, D, ω	$n = \frac{\omega - a}{D} + 1$;
	a, S, ω	$n = \frac{2S}{a + \omega}$;
	D, a, S	$n = \frac{1}{2} + \frac{a}{D} + \sqrt{\left(\frac{2S}{D} + \frac{1}{4} + \left(\frac{a}{D} - 1\right)\frac{a}{D}\right)}$;
	D, ω, S	$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{D} - \sqrt{\left(\left(\frac{\omega}{D} + 1\right)\frac{\omega}{D} + \frac{1}{4} - \frac{2S}{D}\right)}$;
a	ω, D, n	$a = \omega - (n-1)D$;
	n, S, ω	$a = \frac{2S}{n} - \omega$;
	S, n, D	$a = \frac{S}{n} - \frac{D}{2}(n-1)$;
	S, ω, D	$a = \frac{D}{2} + \sqrt{\left(\omega^2 + D\left(\omega + \frac{D}{4} - 2S\right)\right)}$;

Geometrische Progressions-Formeln.

(nach §. 161.)

Für	wenn gegeben sind	ist die Formel
ω	a, q, n	$\omega = a\,q^{n-1}$;
	a, S, q	$\omega = S - \frac{S-a}{q}$;
	n, S, q	$\omega = \frac{q^{n-1}(q-1)S}{q^n-1}$;
	a, S, n	$\omega = (S-\omega)^{n-1} - a\,(S-a)^{n-1} = 0$;
S	a, q, ω	$S = \frac{q\omega - a}{q-1}$;
	a, q, n	$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$;
	n, q, ω	$S = \frac{\omega(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$;
	a, n, ω	$S = \frac{\omega\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - 1}$;
q	a, n, ω	$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$;
	a, S, ω	$q = \frac{S-a}{S-\omega}$;
	a, S, n	$q^n - \frac{S}{a}q + \frac{S-a}{a} = 0$;
	n, S, ω	$q^n - \frac{S}{S-\omega}q^{n-1} + \frac{S}{S-\omega} = 0$;

Für	wenn gegeben sind	ist die Formel
n	a, q, ω	$q^n = \frac{\omega q}{a}$;
	a, S, q	$q^n = 1 + \frac{(q-1)S}{a}$;
	ω, S, q	$q^n = \frac{\omega q}{S-(S-\omega)q}$;
	a, S, ω	$\left(\frac{S-a}{S-\omega}\right)^{n-1} = \frac{\omega}{a}$;
a	ω, q, n	$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$;
	ω, S, q	$a = S-(S-\omega)q$;
	n, S, q	$a = \frac{(q-1)S}{q^n-1}$;
	n, S, ω	$a(S-a)^{n-1} - \omega(S-\omega)^{n-1} = 0$;

Tabelle

der

Potenzen aller ganzen Zahlen

von 1 bis 100

bis zum 6ten Grade

und der

Quadrat- und Cubikzahlen aller ganzen Zahlen

von 1 bis 1000.

Zahl od. 1te	2te	3te	4te	5te	6te Potenz.
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000
11	121	1331	14641	161051	1771561
12	144	1728	20736	248832	2985984
13	169	2197	28561	371293	4826809
14	196	2744	38416	537824	7529536
15	225	3375	50625	759375	11390625
16	256	4096	65536	1048576	16777216
17	289	4913	83521	1419857	24137569
18	324	5832	104976	1889568	34012224
19	361	6859	130321	2476099	47045881
20	400	8000	160000	3200000	64000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121
22	484	10648	234256	5153632	113379904
23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	576	13824	331776	7962624	191102976
25	625	15625	390625	9765625	244140625
26	676	17576	456976	11881376	308915776
27	729	19683	531441	14348907	387420489
28	784	21952	614656	17210368	481890304
29	841	24389	707281	20511149	594823321
30	900	27000	810000	14300000	729000000
31	961	29791	923521	28629151	887503681
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625

Zahl od. 1te	2te	3te	4te	5te	6te Potenz.
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336
37	1369	50653	1874161	69343957	2565726409
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049
44	1936	85184	3748096	164916224	7256313856
45	2025	91125	4100625	184528125	8303765625
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896
47	2209	103823	4879681	229345007	10779215329
48	2304	110592	5308416	254803968	12230590464
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000
51	2601	132651	6765201	345025251	17596287801
52	2704	140608	7311616	380204032	19770609664
53	2809	148877	7890481	418195493	22164381129
54	2916	157464	8503056	459165024	24794911296
55	3025	166375	9150625	503284375	27680640625
56	3136	175616	9834496	550731776	30840979456
57	3249	185193	10556001	601699057	34296447249
58	3364	195112	11316496	656356768	38068692544
59	3481	205379	12117361	714924299	42180533641
60	3600	216000	12960000	777600000	46656000000
61	3721	226981	13845841	844596301	51520374361
62	3844	238328	14776336	916132832	56800235584
63	3969	250047	15752961	992436543	62523502209
64	4096	262144	16777216	1073741824	68719476736
65	4225	274625	17850625	1160290625	75418890625
66	4356	287496	18974736	1252332576	82653950016
67	4489	300763	20151121	1350125107	90458382169
68	4624	314432	21381376	1453933568	98867482624
69	4761	328509	22667121	1564031349	107918163081
70	4900	343000	24010000	1680700000	117649000000

Zahl od. 1te	2te	3te	4te	5te	6te Potenz.
71	5041	357911	25411681	1804229351	128100283921
72	5184	373248	26873856	1934917632	139314069504
73	5329	389017	28398241	2073071593	151334226289
74	5476	405224	29986576	2219006624	164206490176
75	5625	421875	31640625	2373046875	177978515625
76	5776	438976	33362176	2535525376	192699928576
77	5929	456533	35153041	2706784157	208422380089
78	6084	474552	37015056	2887174368	225199600704
79	6241	493039	38950081	3077056399	243087455521
80	6400	512000	40960000	3276800000	262144000000
81	6561	531441	43046721	3486784401	282429536481
82	6724	551368	45212176	3707398432	304006671424
83	6889	571787	47458321	3939040643	326940373369
84	7056	592704	49787136	4182119424	351298031616
85	7225	614125	52200625	4437053125	377149515625
86	7396	636056	54700816	4704270176	404567235136
87	7569	658503	57289761	4984209207	433626201009
88	7744	681472	59969536	5277319168	464404086784
89	7921	704969	62742241	5584059449	496981290961
90	8100	729000	65610000	5904900000	531441000000
91	8281	753571	68574961	6240321451	567869252041
92	8464	778688	71639296	6590815232	606355001344
93	8649	804357	74805201	6956883693	646990183449
94	8836	830584	78074896	7339040224	689869781056
95	9025	857375	81450625	7737809375	735091890625
96	9216	884736	84934656	8153726976	782757789696
97	9409	912673	88529281	8587340257	832972004929
98	9604	941192	92236816	9039207968	885842380864
99	9801	970299	96059601	9509900499	941480149401
100	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000

N.	Quadr.	Cub.
101	10201	1030301
102	10404	1061208
103	10609	1092727
104	10816	1124864
105	11025	1157625
106	11236	1191016
107	11449	1225043
108	11664	1259712
109	11881	1295029
110	12100	1331000
111	12321	1367631
112	12544	1404928
113	12769	1442897
114	12996	1481544
115	13225	1520875
116	13456	1560896
117	13689	1601613
118	13924	1643032
119	14161	1685159
120	14400	1728000
121	14641	1771561
122	14884	1815848
123	15129	1860867
124	15376	1906624
125	15625	1953125
126	15876	2000376
127	16129	2048383
128	16384	2097152
129	16641	2146689
130	16900	2197000
131	17161	2248091
132	17424	2299968
133	17689	2352637
134	17956	2406104
135	18225	2460375
136	18496	2515456
137	18769	2571353
138	19044	2628072
139	19321	2685619
140	19600	2744000

N.	Quadr.	Cub.
141	19881	2803221
142	20164	2863288
143	20449	2924207
144	20736	2985984
145	21025	3048625
146	21316	3112136
147	21609	3176523
148	21904	3241792
149	22201	3307949
150	22500	3375000
151	22801	3442951
152	23104	3511808
153	23409	3581577
154	23716	3652264
155	24025	3723875
156	24336	3796416
157	24649	3869893
158	24964	3944312
159	25281	4019679
160	25600	4096000
161	25921	4173281
162	26244	4251528
163	26569	4330747
164	26896	4410944
165	27225	4492125
166	27556	4574296
167	27889	4657463
168	28224	4741632
169	28561	4826809
170	28900	4913000
171	29241	5000211
172	29584	5088448
173	29929	5177717
174	30276	5268024
175	30625	5359375
176	30976	5451776
177	31329	5545233
178	31684	5639752
179	32041	5735339
180	32400	5832000

N.	Quadr.	Cub.
181	32761	5929741
182	33124	6028568
183	33489	6128487
184	33856	6229504
185	34225	6331625
186	34596	6434856
187	34969	6539203
188	35344	6644672
189	35721	6751269
190	36100	6859000
191	36481	6967871
192	36864	7077888
193	37249	7189057
194	37636	7301384
195	38025	7414875
196	38416	7529536
197	38809	7645373
198	39204	7762392
199	39601	7880599
200	40000	8000000
201	40401	8120601
202	40804	8242408
203	41209	8365427
204	41616	8489664
205	42025	8615125
206	42436	8741816
207	42849	8869743
208	43264	8998912
209	43681	9129329
210	44100	9261000
211	44521	9393931
212	44944	9528128
213	45369	9663597
214	45796	9800344
215	46225	9938375
216	46656	10077696
217	47089	10218313
218	47524	10360232
219	47961	10503459
220	48400	10648000

N.	Quadr.	Cub.
221	48841	10793861
222	49284	10941048
223	49729	11089567
224	50176	11239424
225	50625	11390625
226	51076	11543176
227	51529	11697083
228	51984	11852352
229	52441	12008989
230	52900	12167000
231	53361	12326391
232	53824	12487168
233	54289	12649337
234	54756	12812904
235	55225	12977875
236	55696	13144256
237	56169	13312053
238	56644	13481272
239	57121	13651919
240	57600	13824000
241	58081	13997521
242	58564	14172488
243	59049	14348907
244	59536	14526784
245	60025	14706125
246	60516	14886936
247	61009	15069223
248	61504	15252992
249	62001	15438249
250	62500	15625000
251	63001	15813251
252	63504	16003008
253	64009	16194277
254	64516	16387064
255	65025	16581375
256	65536	16777216
257	66049	16974593
258	66564	17173512
259	67081	17373979
260	67600	17576000

N.	Quadr.	Cub.
261	68121	17779581
262	68644	17984728
263	69169	18191447
264	69696	18399744
265	70225	18609625
266	70756	18821096
267	71289	19034163
268	71824	19248832
269	72361	19465109
270	72900	19683000
271	73441	19902511
272	73984	20123648
273	74529	20346417
274	75076	20570824
275	75625	20796875
276	76176	21024576
277	76729	21253933
278	77284	21484952
279	77841	21717639
280	78400	21952000
281	78961	22188041
282	79524	22425768
283	80089	22665187
284	80656	22906304
285	81225	23149125
286	81796	23393656
287	82369	23639903
288	82944	23887872
289	83521	24137569
290	84100	24389000
291	84681	24642171
292	85264	24897088
293	85849	25153757
294	86436	25412184
295	87025	25672375
296	87616	25934336
297	88209	26198073
298	88804	26463592
299	89401	26730899
300	90000	27000000

N.	Quadr.	Cub.
301	90601	27270901
302	91204	27543608
303	91809	27818127
304	92416	28094464
305	93025	28372625
306	93636	28652616
307	94249	28934443
308	94864	29218112
309	95481	29503629
310	96100	29791000
311	96721	30080231
312	97344	30371328
313	97969	30664297
314	98596	30959144
315	99225	31255875
316	99856	31554496
317	100489	31855013
318	101124	32157432
319	101761	32461759
320	102400	32768000
321	103041	33076161
322	103684	33386248
323	104329	33698267
324	104976	34012224
325	105625	34328125
326	106276	34645976
327	106929	34965783
328	107584	35287552
329	108241	35611289
330	108900	35937000
331	109561	36264691
332	110224	36594368
333	110889	36926037
334	111556	37259704
335	112225	37595375
336	112896	37933056
337	113569	38272753
338	114244	38614472
339	114921	38958219
340	115600	39304000

N.	Quadr.	Cub.	N.	Quadr.	Cub.
341	116281	39651821	381	145161	55306341
342	116964	40001688	382	145024	55742968
343	117649	40353607	383	146689	56181887
344	118336	40707584	384	147456	56623104
345	119025	41063025	385	148225	57066625
346	119716	41421736	386	148996	57512456
347	120409	41781923	387	149769	57960603
348	121104	42144192	388	150544	58411072
349	121801	42508549	389	151321	58863869
350	122500	42875000	390	152100	59319000
351	123201	43243551	391	152881	59776471
352	123904	43614208	392	153664	60236288
353	124609	43986977	393	154449	60698457
354	125316	44361864	394	155236	61162984
355	126025	44738875	395	156025	61629875
356	126736	45118016	396	156816	62099136
357	127449	45499293	397	157609	62570773
358	128164	45882712	398	158404	63044792
359	128881	46268279	399	159201	63521199
360	129600	46656000	400	160000	64000000
361	130321	47045881	401	160801	64481201
362	131044	47437928	402	161604	64964808
363	131769	47832147	403	162409	65450827
364	132496	48228544	404	163216	65939264
365	133225	48627125	405	164025	66430125
366	133956	49027896	406	164836	66923416
367	134689	49430863	407	165649	67419143
368	135424	49836032	408	166464	67917312
369	136161	50243409	409	167281	68417929
370	136900	50653000	410	168100	68921000
371	137641	51064811	411	168921	69426531
372	138384	51478848	412	169744	69934528
373	139129	51895117	413	170569	70444997
374	139876	52313624	414	171396	70957944
375	140625	52734375	415	172225	71473375
376	141376	53157376	416	173056	71991296
377	142129	53582633	417	173889	72511713
378	142884	54010152	418	174724	73034632
379	143641	54439939	419	175561	73560059
380	144400	54872000	420	176400	74088000

N.	Quadr.	Cub.
421	177241	74618461
422	178084	75151448
423	178929	75686967
424	179776	76225024
425	180625	76765625
426	181476	77308776
427	182329	77854483
428	183184	78402752
429	184041	78953589
430	184900	79507000
431	185761	80062991
432	186624	80621568
433	187489	81182737
434	188356	81746504
435	189225	82312875
436	190096	82881856
437	190969	83453453
438	191844	84027672
439	192721	84604519
440	193600	85184000
441	194481	85766121
442	195364	86350888
443	196249	86938307
444	197136	87528384
445	198025	88121125
446	198916	88716536
447	199809	89314623
448	200704	89915392
449	201601	90518849
450	202500	91125000
451	203401	91733851
452	204304	92345408
453	205209	92959677
454	206116	93576664
455	207025	94196375
456	207936	94818816
457	208849	95443993
458	209764	96071912
459	210681	96702579
460	211600	97336000

N	Quadr.	Cub.
461	212521	97972181
462	213444	98611128
463	214369	99252847
464	215296	99897344
465	216225	100544625
466	217156	101194696
467	218089	101847563
468	219024	102503232
469	219961	103161709
470	220900	103823000
471	221841	104487111
472	222784	105154048
473	223729	105823817
474	224676	106496424
475	225625	107171875
476	226576	107850176
477	227529	108531333
478	228484	109215352
479	229441	109902239
480	230400	110592000
481	231361	111284641
482	232324	111980168
483	233289	112678587
484	234256	113379904
485	235225	114084125
486	236196	114791256
487	237169	115501303
488	238144	116214272
489	239121	116930169
490	240100	117649000
491	241081	118370771
492	242064	119095488
493	243049	119823157
494	244036	120553784
495	245025	121287375
496	246016	122023936
497	247009	122763473
498	248004	123505992
499	249001	124251499
500	250000	125000000

N.	Quadr.	Cub.
501	251001	125751501
502	252004	126506008
503	253009	127263527
504	254016	128024064
505	255025	128787625
506	256036	129554216
507	257049	130323843
508	258064	131096512
509	259081	131872229
510	260100	132651000
511	261121	133432831
512	262144	134217728
513	263169	135005697
514	264196	135796744
515	265225	136590875
516	366256	137388096
517	267289	138188413
518	268324	138991832
519	269361	139798359
520	270400	140608000
521	271441	141420761
522	272484	142236648
523	273529	143055667
524	274576	143877824
525	275625	144703125
526	270676	145531576
527	277729	146363183
528	278784	147197952
529	279841	148035889
530	280900	148877000
531	281961	149721291
532	283024	150568768
533	284089	151419437
534	285156	152273304
535	286225	153130375
536	287296	153990656
537	288369	154854153
538	289444	155720872
539	290521	156590819
540	291600	157464000

N.	Quadr.	Cub.
541	292681	158340421
542	293764	159220088
543	294849	160103007
544	295936	160989184
545	297025	161878625
546	298116	162771336
547	299209	163667323
548	300304	164566592
549	301401	165469149
550	302500	166375000
551	303601	167284151
552	304704	168196608
553	305809	169112377
554	306916	170031464
555	308025	170953875
556	309136	171879616
557	310249	172808693
558	311364	173741112
559	312481	174676879
560	313600	175616000
561	314721	176558481
562	315844	177504328
563	316969	178453547
564	318096	179406144
565	319225	180362125
566	320356	181321496
567	321489	182284263
568	322624	183250432
569	323761	184220009
570	324900	185193000
571	326041	186169411
572	327184	187149248
573	328329	188132517
574	329476	189119224
575	330625	190109375
576	331776	191102976
577	332929	192100033
578	334084	193100552
579	335241	194104539
580	336400	195112000

N.	Quadr.	Cub.
581	337561	196122941
582	338724	197137368
583	339889	198155287
584	341056	199176704
585	342225	200201625
586	343396	201230056
587	344569	202262003
588	345744	203297472
589	346921	204336469
590	348100	205379000
591	349281	206425071
592	350464	207474688
593	351649	208527857
594	352836	209584584
595	354025	210644875
596	355216	211708736
597	356409	212776173
598	357604	213847192
599	358801	214921799
600	360000	216000000
601	361201	217081801
602	362404	218167208
603	363609	219256227
604	364816	220348864
605	366025	221445125
606	367236	222545016
607	368449	223648543
608	369664	224755712
609	370881	225866529
610	372100	226981000
611	373321	228099131
612	374544	229220928
613	375769	230346397
614	376996	231475544
615	378225	232608375
616	379456	233744896
617	380689	234885113
618	381924	236029032
619	383161	237176659
620	384400	238328000

N.	Quadr.	Cub.
621	385641	239483061
622	386884	240641848
623	388129	241804367
624	389376	242970624
625	390625	244140625
626	391876	245314376
627	393129	246491883
628	394384	247673152
629	395641	248858189
630	396900	250047000
631	398161	251239591
632	399424	252435968
633	400689	253636137
634	401956	254840104
635	403225	256047875
636	404496	257259456
637	405769	258474853
638	407044	259694072
639	408321	260917119
640	409600	262144000
641	410881	263374721
642	412164	264609288
643	413449	265847707
644	414736	267089984
645	416025	268336125
646	417316	269586136
647	418609	270840023
648	419904	272097792
649	421201	273359449
650	422500	274625000
651	423801	275894451
652	425104	277167808
653	426409	278445077
654	427716	279726264
655	429025	281011375
656	430336	282300416
657	431649	283593393
658	432964	284890312
659	434281	286191179
660	435600	287496000

N.	Quadr.	Cub.
661	436921	288804781
662	438244	290117528
663	439569	291434247
664	440896	292754944
665	442225	294079625
666	443556	295408296
667	444889	296740963
668	446224	298077632
669	447561	299418309
670	448900	300763000
671	450241	302111711
672	451584	303464448
673	452929	304821217
674	454276	306182024
675	455625	307546875
676	456976	308915776
677	458329	310288733
678	459684	311665752
679	461041	313046839
680	462400	314432000
681	463761	315821241
682	465124	317214568
683	466489	318611987
684	467856	320013504
685	469225	321419125
686	470596	322828856
687	471969	324242703
688	473344	325660672
689	474721	327082769
690	476100	328509000
691	477481	329939371
692	478864	331373888
693	480249	332812557
694	481636	334255384
695	483025	335702375
696	484416	337173536
697	485809	338608873
698	487204	340068392
699	488601	341532099
700	490000	343000000

N.	Quadr.	Cub.
701	491401	344472101
702	492804	345948408
703	494209	347428927
704	495616	348913664
705	497025	350402625
706	498436	351895816
707	499849	353393243
708	501264	354894912
709	502681	356400829
110	504100	357911000
711	505521	359425431
712	506944	360944128
713	508369	362467097
714	509796	363994344
715	511225	365525875
716	512656	367061696
717	514089	368601813
718	515524	370146232
719	516961	371694959
720	518400	373248000
721	519841	374805361
722	521284	376367048
723	522729	377933067
724	524176	379503424
725	525625	381078125
720	527076	382657176
727	528529	384240583
728	529984	395828352
729	531441	387420489
730	532900	389017000
731	534361	390617891
732	535824	392223168
733	537289	393832837
734	538756	395446904
735	540225	397065375
736	541696	398688256
737	543169	400315553
738	544644	401947272
739	546121	403583419
740	547600	405224000

N.	Quadr.	Cub.
741	549081	406869021
742	550564	408518488
743	552049	410172407
744	553536	411880784
745	555025	413493625
746	556516	415160936
747	558009	416832723
748	559504	418508992
749	561001	420189749
750	562500	421875000
751	564001	423564751
752	565504	425259008
753	567009	426957777
754	568516	428661064
755	570025	430368875
756	571536	432081216
757	573049	433798093
758	574564	435519512
759	576081	437245479
760	577600	438976000
761	579121	440711081
762	580644	442450728
763	582169	444194947
764	583696	445943744
765	585225	447697125
766	586756	449455096
767	588289	451217663
768	589824	452984832
769	591361	454756609
770	592900	456533000
771	594441	458314011
772	595984	460099648
773	597529	461889917
774	599076	463684824
775	600625	465484375
776	602176	467288576
777	603729	469097433
778	605284	470910952
779	606841	472729139
780	608400	474552000

N.	Quadr.	Cub.
781	609961	476379541
782	611524	478211768
783	613089	480048687
784	614656	481890304
785	616225	483736625
786	617796	485587656
787	619369	487443403
788	620944	489303872
789	622521	491169069
790	624100	493039000
791	625681	494913671
792	627264	496793088
793	628849	498677257
794	630436	500566184
795	632025	502459875
796	633616	504358336
797	635209	506261573
798	636804	508169592
799	638401	510082399
800	640000	512000000
801	641601	513922401
802	643204	515849608
803	644809	517781627
804	646416	519718464
805	648025	521660125
806	649636	523606616
807	651249	525557943
808	652864	527514112
809	654481	529475129
810	656100	531441000
811	657721	533111731
812	659344	535387328
813	660969	537367797
814	662596	539353144
815	664225	541343375
816	665856	543338496
817	667489	545338513
818	669124	547343432
819	670761	549353259
820	672400	551368000

N.	Quadr.	Cub.
821	674041	553387061
822	675684	555412248
823	677329	557441767
824	678976	559476224
825	680625	561515625
826	682276	563559976
827	683929	565609283
828	685584	567663552
829	687241	569722789
830	688900	571787000
831	690561	573856191
832	692224	575930368
833	693889	578009537
834	695556	580093704
835	697225	582182875
836	698896	584277056
837	700569	586376253
838	702244	588480472
839	703921	590589719
840	705600	592704000
841	707281	594823321
842	708964	596947688
843	710649	599077107
844	712336	601211584
845	714025	603351125
846	715716	605495736
847	717409	607645423
848	719104	609800192
849	720801	611960049
850	722500	614125000
851	724201	616295051
852	725904	618470208
853	727600	620650477
854	729316	622835864
855	731025	625026375
856	732736	627222016
857	734449	629422793
858	736164	631628712
859	737881	633839779
860	739600	636056000

N.	Quadr.	Cub.
861	741321	638277381
862	743044	640503928
863	744769	642735647
864	746496	644972544
865	748225	647214625
866	749956	649461896
867	751689	651714363
868	753424	653972032
869	755161	656234909
870	756900	658503000
871	758641	660776311
872	760384	663054848
873	762129	665338617
874	763876	667627624
875	765625	669921875
876	767376	672221376
877	769129	674526133
878	770884	676836152
879	772641	679151439
880	774400	681472000
881	776161	683797841
882	777924	686128968
883	779689	688465387
884	781456	690807104
885	783225	693154125
886	784996	695506456
887	786769	697864103
888	788544	700227072
889	790321	702595369
890	792100	704969000
891	793881	707347971
892	795664	709732288
893	797449	712121957
894	799236	714516984
895	801025	716917375
896	802816	719323136
897	804609	721734273
898	806404	724150792
899	808201	726572699
900	810000	729000000

N.	Quadr.	Cub.
901	811801	731432701
902	813604	733870808
903	815409	736314327
904	817216	738763264
905	819025	741217625
906	820836	743677416
907	822649	746142643
908	824464	748613312
909	826281	751089429
910	828100	753571000
911	829921	756058031
912	831744	758550528
913	833569	761048497
914	835396	763551944
915	837225	766060875
916	839056	768575296
917	840889	771095213
918	842724	773620632
919	844561	776151559
920	846400	778688000
921	848241	781229961
922	850084	783777448
923	851929	786330467
924	853776	788889024
925	855625	791453125
926	857476	794022776
927	859329	796597983
928	861184	799178752
929	863041	801765089
930	864900	804357000
931	866761	806954491
932	868624	809557568
933	870489	812166237
934	872356	814780504
935	874225	817400375
936	876096	820025856
937	877969	822656953
938	879844	825293672
939	881721	827936019
940	883600	830584000

N.	Quadr.	Cub.
941	885481	833237621
942	887364	835896888
943	889249	838561807
944	891136	841232384
945	893025	843908625
946	894916	846590536
947	896809	849278123
948	898704	851971392
949	900601	854670349
950	902500	857375000
951	904401	860085351
952	906304	862801408
953	908209	865523177
954	910116	868250664
955	912025	870983875
956	913936	873722816
957	915849	876467493
958	917764	879217912
959	919681	881974079
960	921600	884736000
961	923521	887503681
962	925444	890277128
963	927369	893056347
964	929296	895841344
965	931225	898632125
966	933156	901428696
967	935089	904231063
968	937024	907039232
969	938961	909853209
970	940900	912673000
971	942841	915498611
972	944784	918330048
973	946729	921167317
974	948676	924010424
975	950625	926859375
976	952576	929714176
977	954529	932574833
978	956484	935441352
979	958441	938313739
980	960400	941192000

N.	Quadr.	Cub.
981	962361	944076141
982	964324	946966168
983	966289	949862087
984	968256	952763904
985	970225	955671625
986	972196	958585256
987	974169	961504803
988	976144	964430272
989	978121	967361669
990	980100	970299000

N.	Quadr.	Cub.
991	982081	973242271
992	984064	976191488
993	986049	979146657
994	988036	982107784
995	990025	985074875
996	992016	988047936
997	994009	991026973
998	996004	994011992
999	998001	997002999
1000	1000000	1000000000

Tabelle

der

Quadrat- und Cubikwurzeln

aus allen ganzen Zahlen

von 1 bis 1000.

N.	R. Quad.	Rad. Cub.	N.	R. Quad.	Rad. Cub.
1	1,0000000	1,0000000	41	6,4031242	3,4482172
2	1,4142136	1,2599205	42	6,4807407	3,4760266
3	1,7320508	1,4422496	43	6,5574385	3,5033981
4	2,0000000	1,5874011	44	6,6332496	3,5303483
5	2,2360680	1,7099759	45	6,7082039	3,5568933
6	2,4494897	1,8171206	46	6,7823300	3,5830479
7	2,6457513	1,9129312	47	6,8556547	3,6088261
8	2,8284271	2,0000000	48	6,9282032	3,6342411
9	3,0000000	2,0800837	49	7,0000000	3,6593057
10	3,1622777	2,1544347	50	7,0710678	3,6840314
11	3,3166248	2,2239801	51	7,1414284	3,7084298
12	3,4641016	2,2894286	52	7,2111026	3,7325111
13	3,6055513	2,3513347	53	7,2801099	3,7562858
14	3,7416574	2,4101422	54	7,3484692	3,7797631
15	3,8729833	2,4662121	55	7,4161985	3,8029525
16	4,0000000	2,5198421	56	7,4833148	3,8258624
17	4,1231056	2,5712816	57	7,5498344	3,8485011
18	4,2426407	2,6207414	58	7,6157731	3,8708766
19	4,3588989	2,6684016	59	7,6811458	3,8929965
20	4,4721359	2,7144177	60	7,7459667	3,9148676
21	4,5825757	2,7589243	61	7,8102497	3,9364972
22	4,6904158	2,8020393	62	7,8740078	3,9578915
23	4,7958315	2,8438670	63	7,9372539	3,9790571
24	4,8989795	2,8844991	64	8,0000000	4,0000000
25	5,0000000	2,9240177	65	8,0622577	4,0207256
26	5,0990195	2,9624960	66	8,1240384	4,0412401
27	5,1961524	3,0000000	67	8,1853527	4,0615480
28	5,2915026	3,0365889	68	8,2462112	4,0816551
29	5,3851648	3,0723168	69	8,3066239	4,1015661
30	5,4772256	3,1072325	70	8,3666003	4,1212853
31	5,5677644	3,1413806	71	8,4261497	4,1408178
32	5,6568543	3,1748021	72	8,4852814	4,1601676
33	5,7445626	3,2075343	73	8,5440037	4,1793390
34	5,8309519	3,2396118	74	8,6023253	4,1983364
35	5,9160798	3,2710663	75	8,6602540	4,2171633
36	6,0000000	3,3019272	76	8,7177978	4,2358236
37	6,0827625	3,3322218	77	8,7749644	4,2543210
38	6,1644140	3,3619754	78	8,8317609	4,2726586
39	6,2449980	3,3912114	79	8,8881944	4,2908404
40	6,3245553	3,4199519	80	8,9442719	4,3088695

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
81	9,0000000	4,3267487
82	9,0553851	4,3444815
83	9,1104336	4,3620707
84	9,1651514	4,3795191
85	9,2195445	4,3968296
86	9,2736185	4,4140049
87	9,3273791	4,4310476
88	9,3808315	4,4479602
89	9,4339811	4,4647451
90	9,4868330	4,4814047
91	9,5393919	4,4979414
92	9,5916630	4,5143574
93	9,6436507	4,5306549
94	9,6953597	4,5468359
95	9,7467943	4,5629026
96	9,7979589	4,5788570
97	9,8488577	4,5947009
98	9,8994949	4,6104363
99	9,9498744	4,6260650
100	10,0000000	4,6415888
101	10,0498756	4,6570095
102	10,0995049	4,6723288
103	10,1488915	4,6875481
104	10,1980390	4,7026694
105	10,2469507	4,7176940
106	10,2956301	4,7326234
107	10,3440804	4,7474594
108	10,3923048	4,7622032
109	10,4403065	4,7768562
110	10,4880885	4,7914199
111	10,5356537	4,8058956
112	10,5830052	4,8202845
113	10,6301458	4,8345881
114	10,6770782	4,8488075
115	10,7238053	4,8629441
116	10,7703296	4,8769989
117	10,8166538	4,8909730
118	10,8627805	4,9048681
119	10,9087121	4,9186847
120	10,9544511	4,9324242

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
121	11,0000000	4,9460874
122	11,0453610	4,9596756
123	11,0905365	4,9731898
124	11,1355287	4,9866309
125	11,1803399	5,0000000
126	11,2249722	5,0132980
127	11,2694276	5,0265257
128	11,3137085	5,0396842
129	11,3578167	5,0527744
130	11,4017542	5,0657970
131	11,4455231	5,0787531
132	11,4891253	5,0916434
133	11,5325626	5,1044687
134	11,5758369	5,1172299
135	11,6189500	5,1299275
136	11,6619038	5,1425632
137	11,7046999	5,1551368
138	11,7473401	5,1676492
159	11,7898261	5,1801013
140	11,8321596	5,1924941
141	11,8743421	5,2048279
142	11,9163753	5,2171034
143	11,9582607	5,2293215
144	12,0000000	5,2414828
145	12,0415945	5,2535878
146	12,0830460	5,2656374
147	12,1243556	5,2776321
148	12,1655251	5,2895725
149	12,2065556	5,3014592
150	12,2474487	5,3132928
151	12,2882057	5,3250740
152	12,3288280	5,3368033
153	12,3693169	5,3484812
154	12,4096737	5,3601085
155	12,4498996	5,3716853
156	12,4899960	5,3832126
157	12,5299641	5,3946907
158	12,5698051	5,4061202
159	12,6095202	5,4175016
160	12,6491106	5,4288352

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
101	12,0885775	5,4401218
102	12,7279220	5,4513618
103	12,7671453	5,4625556
104	12,8062485	5,4737036
105	12,8452326	5,4848065
106	12,8840987	5,4958647
107	12,9228480	5,5068784
108	12,9614814	5,5178484
109	13,0000000	5,5287748
110	13,0384048	5,5396583
111	13,0766968	5,5504993
112	13,1148770	5,5612979
113	13,1529464	5,5720547
114	13,1909059	5,5827701
115	13,2287565	5,5934447
116	13,2664992	5,6040787
117	13,3041347	5,6146724
118	13,3416641	5,6252263
119	13,3790882	5,6357408
120	13,4164078	5,6462162
121	13,4536240	5,6566528
122	13,4907376	5,6670511
123	13,5277492	5,6774114
124	13,5646599	5,6877340
125	13,6014705	5,6980192
126	13,6381817	5,7082670
127	13,6747943	5,7184790
128	13,7113092	5,7286544
129	13,7477271	5,7387936
130	13,7840487	5,7488970
131	13,8202749	5,7589652
132	13,8564064	5,7689986
133	13,8924440	5,7789965
134	13,9283883	5,7889603
135	13,9642400	5,7988907
136	14,0000000	5,8087857
137	14,0356688	5,8186478
138	14,0712473	5,8284766
139	14,1067356	5,8382724
140	14,1421356	5,8480354

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
201	14,1774468	5,8577661
202	14,2126704	5,8674643
203	14,2478069	5,8771306
204	14,2828569	5,8867653
205	14,3178210	5,8963688
206	14,3527000	5,9059405
207	14,3874946	5,9154817
208	14,4222051	5,9249921
209	14,4568323	5,9344721
210	14,4913767	5,9439218
211	14,5258390	5,9533418
212	14,5602197	5,9627320
213	14,5945195	5,9720926
214	14,6287387	5,9814240
215	14,6628783	5,9907261
216	14,6969385	6,0000000
217	14,7309199	6,0092449
218	14,7648231	6,0184616
219	14,7986485	6,0276501
220	14,8323969	6,0368 06
221	14,8660687	6,0459436
222	14,8996644	6,0550489
223	14,9331845	6,0641270
224	14,9666295	6,0731780
225	15,0000000	6,0822019
226	15,0332964	6,0911994
227	15,0665192	6,1001704
228	15,0996689	6,1091148
229	15,1327459	6,1180332
230	15,1657509	6,1269256
231	15,1986841	6,1357924
232	15,2315462	6,1446336
233	15,2643375	6,1534494
234	15,2970585	6,1622401
235	15,3297097	6,1710058
236	15,3622915	6,1797466
237	15,3948043	6,1884628
238	15,4272486	6,1971543
239	15,4596248	6,2058218
240	15,4919333	6,2144650

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
241	15,5241747	6,2230843
242	15,5563492	6,2316796
243	15,5884573	6,2402515
244	15,6204993	6,2487999
245	15,6524759	6,2573247
246	15,6843871	6,2658265
247	15,7162337	6,2743053
248	15,7480157	6,2827613
249	15,7797339	6,2911946
250	15,8113883	6,2996052
251	15,8429795	6,3079935
252	15,8745079	6,3163596
253	15,9059737	6,3247035
254	15,9373775	6,3330255
255	15,9687194	6,3413257
256	16,0000000	6,3496042
257	16,0312195	6,3578612
258	16,0623784	6,3660968
259	16,0934769	6,3743111
260	16,1245155	6,3825043
261	16,1554944	6,3906765
262	16,1864140	6,3988279
263	16,2172747	6,4069586
264	16,2480768	6,4150686
265	16,2788206	6,4231583
266	16,3095064	6,4312275
267	16,3401346	6,4392767
268	16,3707055	6,4473057
269	16,4012195	6,4553148
270	16,4316767	6,4633041
271	16,4620776	6,4712736
272	16,4924225	6,4792236
273	16,5227116	6,4871547
274	16,5529453	6,4950653
275	16,5831239	6,5029571
276	16,6132477	6,5108301
277	16,6433170	6,5186840
278	16,6733320	6,5265188
279	16,7032931	6,5343349
280	16,7332005	6,5421326

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
281	16,7630546	6,5499116
282	16,7928553	6,5576722
283	16,8226039	6,5654144
284	16,8522995	6,5731392
285	16,8819430	6,5808444
286	16,9115345	6,5885323
287	16,9410743	6,5962023
288	16,9705628	6,6038545
289	17,0000000	6,6114890
290	17,0293864	6,6191059
291	17,0587221	6,6267054
292	17,0880075	6,6342874
293	17,1172427	6,6418523
294	17,1464283	6,6493997
295	17,1755640	6,6569301
296	17,2046505	6,6644437
297	17,2336879	6,6719403
298	17,2626765	6,6794200
299	17,2916164	6,6868831
300	17,3205081	6,6943296
301	17,3493516	6,7017594
302	17,3781472	6,7091728
303	17,4068952	6,7165699
304	17,4355958	6,7239508
305	17,4642492	6,7313155
306	17,4928557	6,7386641
307	17,5214155	6,7459972
308	17,5499288	6,7533128
309	17,5783958	6,7606143
310	17,6068168	6,7678994
311	17,6351921	6,7751689
312	17,6635217	6,7824228
313	17,6918060	6,7896613
314	17,7200452	6,7968843
315	17,7482393	6,8040921
316	17,7763888	6,8112846
317	17,8044938	6,8184620
318	17,8325545	6,8256242
319	17,8605711	6,8327714
320	17,8885438	6,8399037

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
321	17,9164729	6,8470212
322	17,9443584	6,8541240
323	17,9722008	6,8612120
324	18,0000000	6,8682865
325	18,0277564	6,8753444
326	18,0554701	6,8823887
327	18,0831413	6,8894186
328	18,1107703	6,8964344
329	18,1383571	6,9034360
330	18,1539021	6,9104232
331	18,1934054	6,9173964
332	18,2208671	6,9243555
333	18,2482876	6,9313007
334	18,2756669	6,9382321
335	18,3030055	6,9451493
336	18,3303029	6,9520533
337	18,3575598	6,9589434
338	18,3847763	6,9658198
339	18,4119526	6,9726827
340	18,4390889	6,9795321
341	18,4661853	6,9863680
342	18,4932420	6,9931906
343	18,5202592	7,0000000
344	18,5472370	7,0067961
345	18,5741756	7,0135791
346	18,6010752	7,0203489
347	18,6279360	7,0271058
348	18,6547584	7,0338496
349	18,6815416	7,0405800
350	18,7082869	7,0472980
351	18,7349939	7,0540040
352	18,7616630	7,0606966
353	18,7882942	7,0673766
354	18,8148876	7,0740439
355	18,8414436	7,0806987
356	18,8679622	7,0873411
357	18,8944436	7,0939709
358	18,9208879	7,1005883
359	18,9472953	7,1071936
360	18,9736659	7,1137866

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
361	19,0000000	7,1203673
362	19,0262976	7,1269359
363	19,0525589	7,1334923
364	19,0787840	7,1400369
365	19,1049734	7,1465694
366	19,1311265	7,1530901
367	19,1572441	7,1595988
368	19,1833261	7,1660958
369	19,2093727	7,1725808
370	19,2353841	7,1790543
371	19,2613603	7,1855162
372	19,2873015	7,1919663
373	19,3132079	7,1984050
374	19,3390796	7,2048321
375	19,3649167	7,2112478
376	19,3907194	7,2176522
377	19,4164878	7,2240451
378	19,4422221	7,2304267
379	19,4679224	7,2367972
380	19,4935887	7,2431564
381	19,5192213	7,2495045
382	19,5448203	7,2558415
383	19,5703858	7,2621674
384	19,5959180	7,2684823
385	19,6214169	7,2747863
386	19,6468827	7,2810794
387	19,6723156	7,2873616
388	19,6977156	7,2936330
389	19,7230829	7,2998936
390	19,7484176	7,3061436
391	19,7737199	7,3123828
392	19,7989899	7,3186114
393	19,8242276	7,3248294
394	19,8494332	7,3310369
395	19,8746069	7,3372339
396	19,8997487	7,3434204
397	19,9248588	7,3495966
398	19,9499373	7,3557622
399	19,9749844	7,3619177
400	20,0000000	7,3680630

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
401	20,0249844	7,3741979
402	20,0499376	7,3803227
403	20,0748599	7,3864373
404	20,0997512	7,3925416
405	20,1246118	7,3986362
406	20,1494417	7,4047206
407	20,1742410	7,4107950
408	20,1990099	7,4168595
409	20,2237484	7,4229141
410	20,2484567	7,4289588
411	20,2731349	7,4349937
412	20,2977831	7,4410189
413	20,3224014	7,4470342
414	20,3469899	7,4530399
415	20,3715488	7,4590359
416	20,3960780	7,4650223
417	20,4205779	7,4709992
418	20,4450483	7,4760662
419	20,4694895	7,4829241
420	20,4939015	7,4888723
421	20,5182845	7,4948112
422	20,5426386	7,5007406
423	20,5669638	7,5066607
424	20,5912603	7,5125715
425	20,6155281	7,5184729
426	20,6397677	7,5243652
427	20,6639784	7,5302482
428	20,6881609	7,5361220
429	20,7123152	7,5419867
430	20,7364413	7,5478423
431	20,7605395	7,5536889
432	20,7846097	7,5595260
433	20,8086520	7,5653548
434	20,8326667	7,5711742
435	20,8566539	7,5769848
436	20,8806130	7,5827865
437	20,9045450	7,5885793
438	20,9284495	7,5943633
439	20,9523269	7,6001385
440	20,9761770	7,6059050

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
441	21,0000000	7,6116626
442	21,0237960	7,6174116
443	21,0475652	7,6231519
444	21,0713075	7,6288836
445	21,0950231	7,6346067
446	21,1187121	7,6403212
447	21,1423745	7,6460272
448	21,1660105	7,6517247
449	21,1896201	7,6574137
450	21,2132034	7,6630940
451	21,2367606	7,6687664
452	21,2602916	7,6744304
453	21,2837966	7,6800862
454	21,3072757	7,6857333
455	21,3307290	7,6913716
456	21,3541565	7,6970022
457	21,3775581	7,7026242
458	21,4009345	7,7082391
459	21,4242853	7,7138448
460	21,4476106	7,7194426
461	21,4709105	7,7250324
462	21,4941852	7,7306140
463	21,5174348	7,7361877
464	21,5406592	7,7417533
465	21,5638587	7,7473107
466	21,5870331	7,7528605
467	21,6101828	7,7584022
468	21,6333076	7,7639360
469	21,6564078	7,7694620
470	21,6794834	7,7749806
471	21,7025344	7,7804903
472	21,7255609	7,7859931
473	21,7485681	7,7914875
474	21,7715410	7,7969745
475	21,7944947	7,8024537
476	21,8174242	7,8079253
477	21,8403297	7,8133892
478	21,8632111	7,8188450
479	21,8860686	7,8242942
480	21,9089022	7,8297358

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
481	21,9317122	7,8351687
482	21,9544984	7,8405949
483	21,9772609	7,8460133
484	22,0000000	7,8514240
485	22,0227855	7,8568280
486	22,0454077	7,8622241
487	22,0680765	7,8676130
488	22,0907220	7,8729944
489	22,1133444	7,8783684
490	22,1359436	7,8837352
491	22,1585198	7,8890946
492	22,1810730	7,8944468
493	22,2036033	7,8997917
494	22,2261107	7,9051294
495	22,2485955	7,9104599
496	22,2710575	7,9157832
497	22,2934968	7,9210994
498	22,3159136	7,9264085
499	22,3383079	7,9317104
500	22,3606798	7,9370058
501	22,3830292	7,9422931
502	22,4053565	7,9475737
503	22,4276615	7,9528476
504	22,4499443	7,9581144
505	22,4722051	7,9633742
506	22,4944437	7,9686271
507	22,5166605	7,9738731
508	22,5388553	7,9791122
509	22,5610283	7,9843583
510	22,5831795	7,9895697
511	22,6053091	7,9947883
512	22,6274170	8,0000000
513	22,6495033	8,0052049
514	22,6715681	8,0104031
515	22,6936114	8,0155945
516	22,7156334	8,0207793
517	22,7376340	8,0259574
518	22,7596136	8,0311282
519	22,7815715	8,0362934
520	22,8035085	8,0414515

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
521	22,8254244	8,0466030
522	22,8473193	8,0517479
523	22,8691932	8,0568862
524	22,8910463	8,0620180
525	22,9128785	8,0671432
526	22,9346898	8,0722625
527	22,9564805	8,0773743
528	22,9782505	8,0824800
529	23,0000000	8,0875794
530	23,0217288	8,0926723
531	23,0434372	8,0977588
532	23,0651252	8,1028385
533	23,0867928	8,1079128
534	23,1084400	8,1129830
535	23,1300670	8,1180413
536	23,1516738	8,1230962
537	23,1732604	8,1281448
538	23,1948270	8,1331870
539	23,2163735	8,1382230
540	23,2379000	8,1432528
541	23,2594067	8,1482764
542	23,2808935	8,1532939
543	23,3023604	8,1583056
544	23,3238076	8,1633102
545	23,3452350	8,1683091
546	23,3666429	8,1733020
547	23,3880311	8,1782887
548	23,4093998	8,1832694
549	23,4307490	8,1882441
550	23,4520788	8,1932127
551	23,4733892	8,1981752
552	23,4946802	8,2031318
553	23,5159520	8,2080824
554	23,5372046	8,2130271
555	23,5584379	8,2179657
556	23,5796522	8,2228985
557	23,6008474	8,2278253
558	23,6220236	8,2327463
559	23,6431803	8,2376614
560	23,6643191	8,2425706

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
561	23,6854385	8,2474739
562	23,7065392	8,2523715
563	23,7276210	8,2572632
564	23,7486841	8,2621492
565	23,7697286	8,2670294
566	23,7907545	8,2719038
567	23,8117618	8,2767725
568	23,8327506	8,2816355
569	23,8537209	8,2864927
570	23,8746727	8,2913443
571	23,8956063	8,2961902
572	23,9165215	8,3010305
573	23,9374184	8,3058651
574	23,9582971	8,3106941
575	23,9791576	8,3155175
576	24,0000000	8,3203352
577	24,0208241	8,3251475
578	24,0416305	8,3299542
579	24,0624188	8,3347553
580	24,0831891	8,3395508
581	24,1039416	8,3443410
582	24,1246761	8,3491256
583	24,1453929	8,3539047
584	24,1660919	8,3586783
585	24,1867732	8,3634465
586	24,2074368	8,3682094
587	24,2280829	8,3729667
588	24,2487113	8,3777187
589	24,2693222	8,3824652
590	24,2899156	8,3872065
591	24,3104916	8,3919424
592	24,3310500	8,3966729
593	24,3515913	8,4013981
594	24,3721152	8,4061180
595	24,3926218	8,4108326
596	24,4131112	8,4155423
597	24,4335834	8,4202460
598	24,4540385	8,4249447
599	24,4744765	8,4296383
600	24,4948974	8,4343266

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
601	24,5153013	8,4390098
602	24,5356883	8,4436877
603	24,5560583	8,4483605
604	24,5764114	8,4530281
605	24,5967477	8,4576905
606	24,6170072	8,4623478
607	24,6373699	8,4670001
608	24,6576560	8,4716472
609	24,6779253	8,4762891
610	24,6981781	8,4809261
611	24,7184140	8,4855580
612	24,7386337	8,4901847
613	24,7588368	8,4948055
614	24,7790234	8,4994232
615	24,7991935	8,5040349
616	24,8193473	8,5086417
617	24,8394847	8,5132434
618	24,8596058	8,5178402
619	24,8797106	8,5224321
620	24,8997092	8,5270189
621	24,9198716	8,5316009
622	24,9399278	8,5361779
623	24,9599619	8,5407501
624	24,9799919	8,5453173
625	25,0000000	8,5498797
626	25,0199920	8,5544372
627	25,0399680	8,5589899
628	25,0599281	8,5635377
629	25,0798724	8,5680807
630	25,0998007	8,5726188
631	25,1197133	8,5771522
632	25,1396102	8,5816808
633	25,1594912	8,5862048
634	25,1793566	8,5907238
635	25,1992063	8,5952380
636	25,2190404	8,5997476
637	25,2388587	8,6042524
638	25,2586619	8,6087526
639	25,2784493	8,6132480
640	25,2982213	8,6177388

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
641	25,3179778	8,6222248
642	25,3377189	8,6267062
643	25,3574446	8,6311829
644	25,3771551	8,6356551
645	25,3968502	8,6401226
646	25,4165300	8,6445855
647	25,4361946	8,6490437
648	25,4558441	8,6534974
649	25,4754784	8,6579465
650	25,4950975	8,6623901
651	25,5147014	8,6668310
652	25,5342906	8,6712665
653	25,5538646	8,6756974
654	25,5734237	8,6801238
655	25,5929678	8,6845456
656	25,6124969	8,6889630
657	25,6320112	8,6933758
658	25,6515107	8,6977842
659	25,6709953	8,7021882
660	25,6904651	8,7065876
661	25,7099203	8,7109827
662	25,7293606	8,7153733
663	25,7487864	8,7197595
664	25,7681974	8,7241414
665	25,7875939	8,7285184
666	25,8069756	8,7328917
667	25,8263431	8,7372604
668	25,8456959	8,7416247
669	25,8650343	8,7459846
670	25,8843582	8,7503401
671	25,9036677	8,7546015
672	25,9229628	8,7590383
673	25,9422435	8,7633809
674	25,9615099	8,7677192
675	25,9807621	8,7720532
676	26,0000000	8,7763829
677	26,0192236	8,7807084
678	26,0384331	8,7850296
679	26,0576284	8,7893466
680	26,0768096	8,7936593

N.	R. Quad.	Rad. Cub.
681	26,0959767	8,7979679
682	26,1151297	8,8022721
683	26,1342687	8,8065722
684	26,1533936	8,8108681
685	26,1725047	8,8151598
686	26,1916017	8,8194473
687	26,2106848	8,8237307
688	26,2297541	8,8280099
689	26,2488095	8,8322850
690	26,2678511	8,8365559
691	26,2868789	8,8408227
692	26,3058929	8,8450853
693	26,3248931	8,8493446
694	26,3438797	8,8535985
695	26,3628526	8,8578489
696	26,3818119	8,8620951
697	26,4007575	8,8663373
698	26,4196896	8,8705757
699	26,4386081	8,8748099
700	26,4575131	8,8790400
701	26,4764046	8,8832616
702	26,4952825	8,8874882
703	26,5141471	8,8917062
704	26,5329983	8,8969204
705	26,5518361	8,9001304
706	26,5706605	8,9043365
707	26,5894716	8,9085387
708	26,6082694	8,9127368
709	26,6270539	8,9169311
710	26,6458252	8,9211214
711	26,6645832	8,9253077
712	26,6833281	8,9294902
713	26,7020598	8,9336686
714	26,7207784	8,9378433
715	26,7394839	8,9420140
716	26,7581763	8,9461808
717	26,7768556	8,9503438
718	26,7955220	8,9545033
719	26,8141753	8,9586581
720	26,8328157	8,9628095

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
721	26,8514431	8,9669570
722	26,8700577	8,9711007
723	26,8886593	8,9752406
724	26,9072481	8,9793766
725	26,9258240	8,9835088
726	26,9443871	8,9876373
727	26,9629375	8,9917620
728	26,9814751	8,9958829
729	27,0000000	9,0000000
730	27,0185121	9,0041133
731	27,0370117	9,0082229
732	27,0554985	9,0123287
733	27,0739727	9,0164309
734	27,0924344	9,0205292
735	27,1108832	9,0246239
736	27,1293199	9,0287148
737	27,1477439	9,0328021
738	27,1661554	9,0368856
739	27,1845544	9,0409655
740	27,2029410	9,0450418
741	27,2213151	9,0491142
742	27,2396769	9,0531831
743	27,2580263	9,0572482
744	27,2763634	9,0613098
745	27,2946883	9,0653677
746	27,3130006	9,0694219
747	27,3313007	9,0734726
748	27,3495887	9,0775197
749	27,3678645	9,0815631
750	27,3861277	9,0856030
751	27,4043792	9,0896392
752	27,4226184	9,0936718
753	27,4408455	9,0977009
754	27,4590604	9,1017265
755	27,4772633	9,1057485
756	27,4954541	9,1097668
757	27,5236330	9,1137818
758	27,5317998	9,1177931
759	27,5499546	9,1218009
760	27,5680975	9,1258053

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
761	27,5862284	9,1298060
762	27,6043475	9,1338033
763	27,6224547	9,1377971
764	27,6405499	9,1417874
765	27,6586334	9,1457742
766	27,6767050	9,1497576
767	27,6947648	9,1537375
768	27,7128129	9,1577139
769	27,7308492	9,1616869
770	27,7488739	9,1656564
771	27,7668867	9,1696225
772	27,7848879	9,1735852
775	27,8028775	9,1775444
774	27,8208555	9,1815003
775	27,8388218	9,1854527
776	27,8567765	9,1894018
777	27,8747199	9,1933447
778	27,8926514	9,1972896
779	27,9105714	9,2012289
780	27,9284801	9,2051641
781	27,9463770	9,2090962
782	27,9642629	9,2130251
783	27,9821371	9,2169505
784	28,0000000	9,2208726
785	28,0178514	9,2247914
786	28,0356915	9,2287068
787	28,0535203	9,2326189
788	28,0713377	9,2365278
789	28,0891438	9,2404333
790	28,1069386	9,2443355
791	28,1247222	9,2482344
792	28,1424945	9,2521300
793	28,1602556	9,2560224
794	28,1780056	9,2599111
795	28,1957443	9,2637972
796	28,2134719	9,2676798
797	28,2311884	9,2715792
798	28,2488938	9,2754352
799	28,2665880	9,2793081
800	28,2842712	9,2831776

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
801	28,3019434	9,2870440
802	28,3196045	9,2909072
803	28,3372546	9,2947671
804	28,3548937	9,2986239
805	28,3725219	9,3024775
806	28,3901391	9,3063277
807	28,4077454	9,3101750
808	28,4253408	9,3140190
809	28,4429253	9,3178599
810	28,4604989	9,3216975
811	28,4780617	9,3255320
812	28,4956137	9,3293634
813	28,5131548	9,3331916
814	28,5306850	9,3370163
815	28,5482048	9,3408386
816	28,5657137	9,3446574
817	28,5832118	9,3484731
818	28,6006993	9,3522857
819	28,6181760	9,3560952
820	28,6356421	9,3599022
821	28,6530977	9,3637049
822	28,6705423	9,3675051
823	28,6879766	9,3713022
824	28,7054002	9,3750963
825	28,7228131	9,3788873
826	28,7402157	9,3826752
827	28,7576077	9,3864600
828	28,7749891	9,3902418
829	28,7923601	9,3940207
830	28,8097206	9,3977964
831	28,8270706	9,4015691
832	28,8444102	9,4053387
833	28,8617393	9,4091054
834	28,8790581	9,4128691
835	28,8963666	9,4166296
836	28,9136646	9,4203872
837	28,9303523	9,4241419
838	28,9482296	9,4278936
839	28,9654967	9,4316423
840	28,9827535	9,4353880

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
841	29,0000000	9,4391307
842	29,0172362	9,4428704
843	29,0344623	9,4466072
844	29,0516781	9,4503410
845	29,0688837	9,4540719
846	29,0860791	9,4577999
847	29,1032644	9,4615249
848	29,1204395	9,4652469
849	29,1376045	9,4689661
850	29,1547595	9,4726825
851	29,1719045	9,4763959
852	29,1890390	9,4801061
853	29,2061637	9,4831136
854	29,2232784	9,4875182
855	29,2403830	9,4912199
856	29,2574777	9,4949188
857	29,2745623	9,4986147
858	29,2916370	9,5023078
859	29,3087018	9,5059980
860	29,3257566	9,5096854
861	29,3428015	9,5133700
862	29,3598365	9,5170519
863	29,3768616	9,5207303
864	29,3938769	9,5244063
865	29,4108823	9,5280798
866	29,4278779	9,5317497
867	29,4448637	9,5354172
868	29,4618397	9,5390818
869	29,4788059	9,5427436
870	29,4957624	9,5464027
871	29,5127091	9,5500589
872	29,5296461	9,5537123
873	29,5465734	9,5573629
874	29,5634910	9,5610108
875	29,5803989	9,5646560
876	29,5972972	9,5682982
877	29,6141858	9,5719377
878	29,6310648	9,5755745
879	29,6479341	9,5792085
880	29,6647939	9,5828397

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
881	29,6816442	9,5864682
882	29,6984848	9,5900939
883	29,7153159	9,5937169
884	29,7321375	9,5973372
885	29,7489495	9,6009548
886	29,7657521	9,6045695
887	29,7825452	9,6081817
888	29,7993288	9,6117913
889	29,8161030	9,6153977
890	29,8328678	9,6190017
891	29,8496231	9,6226029
892	29,8663690	9,6262015
893	29,8831056	9,6297974
894	29,8998328	9,6333907
895	29,9165506	9,6369812
896	29,9332591	9,6405690
897	29,9499582	9,6441542
898	29,9666481	9,6477367
999	29,9833287	9,6513166
900	30,0000000	9,6548938
901	30,0166620	9,6584684
902	30,0333145	9,6620403
903	30,0499584	9,6656096
904	30,0665927	9,6691762
905	30,0832179	9,6727402
906	30,0998339	9,6763017
907	30,1164407	9,6798604
908	30,1330383	9,6834166
909	30,1496268	9,6869702
910	30,1662062	9,6905211
911	30,1827765	9,6940694
912	30,1993377	9,6976151
913	30,2158898	9,7011583
914	30,2324329	9,7046988
915	30,2489669	9,7082369
916	30,2654919	9,7117723
917	30,2820078	9,7153051
918	30,2985148	9,7188351
919	30,3150128	9,7223631
920	30,3315018	9,7258883

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
921	30,3479818	9,7294108
922	30,3644529	9,7329309
923	30,3809150	9,7364487
924	30,3973683	9,7399634
925	30,4138126	9,7434758
926	30,4302481	9,7469856
927	30,4466748	9,7504931
928	30,4630924	9,7539979
929	30,4795013	9,7575002
930	30,4959013	9,7610001
931	30,5122926	9,7644973
932	30,5286750	9,7679922
933	30,5450487	9,7714845
934	30,5614136	9,7749742
935	30,5777697	9,7784616
936	30,5941171	9,7819465
937	30,6104557	9,7854288
938	30,6267857	9,7889087
939	30,6431069	9,7923863
940	30,6594194	9,7958611
941	30,6757233	9,7993335
942	30,6920187	9,8028030
943	30,7083051	9,8062711
944	30,7245829	9,8097362
945	30,7408523	9,8131986
946	30,7571130	9,8160591
947	30,7733651	9,8201169
948	30,7896086	9,8235723
949	30,8058436	9,8270252
950	30,8220700	9,8304757
951	30,8382879	9,8339238
952	30,8544972	9,8373695
953	30,8706981	9,8408127
954	30,8868904	9,8442536
955	30,9030742	9,8476920
956	30,9192497	9,8511283
957	30,9354166	9,8545620
958	30,9515751	9,8579929
959	30,9677251	9,8614217
660	30,9838668	9,8648483

N.	R. Quadr.	Rad. Cub.	N.	R. Quadr.	Rad. Cub.
961	31,0000000	9,8682724	981	31,3209179	9,9362616
962	31,0161248	9,8716941	882	31,3368792	9,9396363
963	31,0222413	9,8751130	983	31,3528308	9,9430092
964	31,0483494	9,8785305	984	31,3687743	9,9463797
965	31,0644492	9,8819431	985	31,3847097	9,9497469
966	31,0805405	9,8853574	986	31,4006369	9,9531138
967	31,0966236	9,8887673	987	31,4165561	9,9564775
968	31,1126983	9,8921749	988	31,4324673	9,9598389
969	31,1287648	9,8955801	989	31,4483704	9,9631980
970	31,1448230	9,8989830	990	31,4642654	9,9665543
971	31,1608729	9,9023835	991	31,4801525	9,9699095
972	31,1769145	9,9057817	992	31,4960315	9,9732619
973	31,1929479	9,9091776	993	31,5119025	9,9766120
974	31,2089731	9,9125712	994	31,5277655	9,9799599
975	31,2249899	9,9159624	995	31,5436206	9,9833054
976	31,2409987	9,9193513	996	31,5594677	9,9866486
977	31,2569992	9,9227379	997	31,5753068	9,9899899
978	31,2729915	9,9261222	998	31,5911380	9,9933288
979	31,2889757	9,9295042	999	31,6069611	9,9966655
980	31,3049517	9,9328838	1000	31,6227766	10,0000000

Stadtliche Bibliothek Bamberg

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vogel, Gottfried C.

Lehrbuch der niedern Arithmetik

München 1829
Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 37
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421427-6